Конспект лекций по курсу «Электродинамика»

Список литературы

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Том II. Теория поля.* → 1-й семестр.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Том VIII. Электродинамика сплошных сред.* → 2-й семестр.
3. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. *Классическая электродинамика.*// 1985.
4. Левич В.Г. *Курс теоретической физики, том 1.* // М.: Наука, 1969.
5. Джексон Дж. *Классическая электродинамика.* // М.: Мир, 1965
6. Угаров В.А. *Специальная теория относительности.*// М.: Наука, 1977.
7. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. *Сборник задач по электродинамике.*
8. Беккер Р. *Теория электричества. Том II. Электронная теория* // Л.-М.: ГИТТЛ, 1941.

Лекция 1

Электродинамика – наука, изучающая электромагнитное поле и его взаимодействие с заряженными частицами как в вакууме, так и в веществе.

История измерений скорости света

Античные учёные, за редким исключением, считали скорость света бесконечной. В Новое время этот вопрос стал предметом дискуссий. Галилей и Гук допускали, что она конечна, хотя и очень велика, в то время как Кеплер, Декарт и Ферма по-прежнему отстаивали бесконечность скорости света.

Первую оценку скорости света дал Олаф Рёмер (1676). Он заметил, что когда Земля и Юпитер находятся по разные стороны от Солнца, затмения спутника Юпитера Ио запаздывают по сравнению с расчётами на 22 минуты. Отсюда он получил значение для скорости света около 221 000 км/сек – неточное, но близкое к истинному. Спустя полвека открытие аберрации позволило подтвердить конечность скорости света и уточнить её оценку.

Аберрация света была открыта в 1727 г. английским астрономом Брэдли, который, намереваясь определить параллаксы некоторых неподвижных звёзд, заметил их перемещение. Открытие вместе с тем послужило новым подтверждением орбитального движения Земли и справедливости вычисления датского астронома Рёмера относительно скорости света.

Аберрация света – кажущееся смещение небесного объекта вследствие конечной скорости распространения света в сочетании с движением наблюдаемого объекта и наблюдателя. Действие аберрации приводит к тому, что видимое направление на объект не совпадает с геометрическим направлением на него в тот же момент времени.

Первая составляющая аберрации связана с собственным движением объекта. Вторая часть аберрации, связанная с движением наблюдателя, носит название звёздной аберрации. Она включает в себя:

– суточную аберрацию, обусловленную участием наблюдателя в суточном вращении Земли;

– годичную аберрацию, вызванную движением Земли по орбите относительно центра масс Солнечной системы;

– вековую аберрацию, связанную с движением Солнечной системы вокруг центра Галактики.

Эффект возникает ввиду изменения пространственной проекции направления на наблюдаемый объект при переходе между разными системами отсчёта.

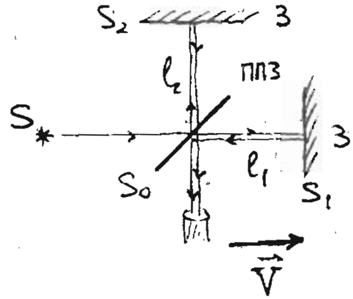
Измерения, основанные на вычислении абберации, позволили более точно определить $c = 303\,000$ км/сек.

Параллакс – изменение видимого положения объекта относительно удалённого фона в зависимости от положения наблюдателя. Зная расстояние между точками наблюдения (база) и угол смещения, можно определить расстояние до объекта: $L = D/(2\sin\alpha/2)$. Для малых углов: $L = D/\alpha$, где угол α выражен в радианах. Параллакс используется в геодезии и астрономии для измерения расстояния до удалённых объектов. На явлении параллакса основано бинокулярное зрение.

Суточный параллакс (геоцентрический параллакс) – разница в направлениях на одно и то же светило из центра масс Земли (геоцентрическое направление) и из заданной точки на поверхности Земли (топоцентрическое направление). Из-за вращения Земли вокруг своей оси положение наблюдателя циклически изменяется. Для наблюдателя, находящегося на экваторе, база параллакса равна диаметру Земли и составляет 12742 км.

Годичный параллакс – угол, под которым со звезды видна большая полуось земной орбиты, перпендикулярная направлению на звезду. Годичные параллаксы являются показателями расстояний до звёзд. Расстояние, годичный параллакс которого равен 1 угловой секунде, называется парсек (1 парсек $= 3,1 \times 10^{16}$ м). Ближайшая звезда Проксима Центавра имеет параллакс 0,77", следовательно, расстояние до неё составляет 1,295 пк.

Лекция 2 Опыт Майкельсона



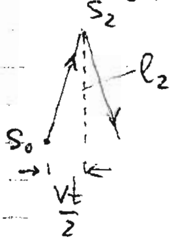
$$ct_{1\to} = l_1 + Vt_{1\to} \qquad t_{1\to} = \frac{l_1}{c-V}$$

согласно класс. з-ну сложению скоростей

$$t_{1\leftarrow} = \frac{l_1}{c+V}$$

$$t_1 = t_{1\to} + t_{1\leftarrow} = \frac{2l_1}{c}\cdot\frac{1}{1-V^2/c^2}$$

Т.к. зеркало S_2 двигается, то имеем такой ход лучей:



$$ct_2 = 2\sqrt{l_2^2 + \left(\frac{Vt_2}{2}\right)^2} \text{ откуда } t_2 = \frac{2l_2}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

Разница времен будет равна: $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c}\left[\frac{l_2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{l_1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\right]$$

Повернем прибор на 90°. тогда, по отношению к скорости $\vec{V}$,

$l_1 \to l_2$, $l_2 \to l_1$, и будем иметь для разности времен:

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{2}{c}\left(\frac{l_2}{1-\frac{V^2}{c^2}} - \frac{l_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right);$$

Разность же, во времени, хода лучей из-за поворота должен поменять интерфер. картину.

$$\tau = \Delta t' - \Delta t = \frac{2(l_1+l_2)}{c}\left(\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)$$

Если $\tau = T = \frac{\lambda}{c}$ то темные полосы → светлые.

$$\frac{V^2}{c^2} \ll 1, \quad \tau = \frac{2(l_1+l_2)}{c}\left(1 + \frac{V^2}{c^2} - 1 - \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\right) = \frac{l_1+l_2}{c}\cdot\frac{V^2}{c^2}$$

$$\frac{l_1+l_2}{c}\cdot\frac{V^2}{c^2} = \frac{\lambda}{c}; \qquad l_1 + l_2 = \lambda\cdot\frac{c^2}{V^2}$$

Для видимого света $\lambda \approx 5000\mathring{A} = 5\cdot10^{-5}$ см, тогда $l_1 + l_2 \approx 5\cdot10^{-5}\cdot10^{8} = 50$ м.

Не обязательно $\tau = T$. Если $\tau \sim 0{,}1\cdot T$ уже заметно смещение полос.

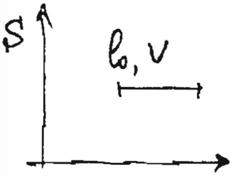
Майкельсона не обнаружил смещ. полос при повороте на $90°$.
Опыт Майк. показал, что при распростр. света $\uparrow\uparrow$ и $\perp$ движению Земли скорость c одна и таже.

Равномерное прямолин. движение тела не влияет на оптические явл. происходящие на нем.
Значит и в оптике справедлив. принц. относительности.

Пуанкаре: все явления на Земле подчиняются принц. относит.

Опыт Майкельсона-Морли (1887)
Все это помещалось в ртуть, l_1 и l_2, за счет многократ. отраж. были очень большими.

Гипотеза Фитцжеральда Лоренца: предпол. что если масштаб движется отн. системы S со скоростью V то его продольные размеры сокращ.



$l = l_0\cdot\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ - лоренцево сокращ. длины.

1). $S_0 - S_1 : l_{10}$, $S_0 - S_2 : l_{20}$ тогда

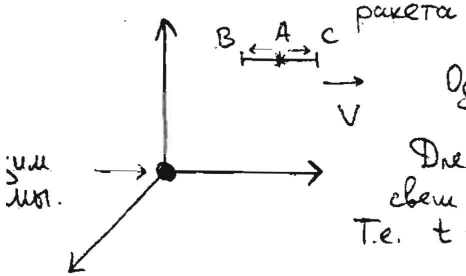
$$\Delta t = \frac{2}{c}\left(\frac{l_{20}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{l_{10}\sqrt{1-V^2/c^2}}{(1-\frac{V^2}{c^2})}\right) = \frac{2}{c}\,\frac{l_{20}-l_{10}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

2) $$\Delta t' = \frac{2}{c}\left(\frac{l_{20}\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-V^2/c^2} - \frac{l_{10}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right) = \Delta t \qquad \tau = \Delta t - \Delta t' = 0$$

Но тогда при переходе из одной сист. и назад будет заметно изменение длины.

В природе $\exists$ скорость распространения взаимодействия.

Преобр. Галилея соотв. принципу абсолютности времени.

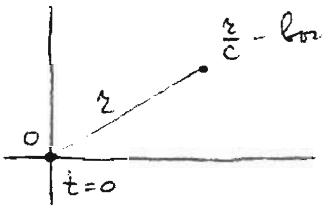


Из т-ки A пуск свет.
Одновремен попад. в экраны B и C.

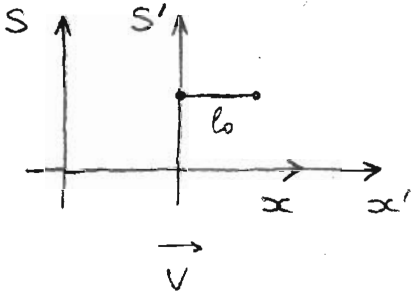
Для „меня" в „неподвиж. сист. отсч."
свет до A B и C дойдет не одновременно
Т.е. $t = t'$ не верное (или приближенное)

Надо найти новые преобразования позволяющие находить коорд. и времени одного и того же события в разных сист. отсч.

Надо построить систему коорд., и чтобы в каждой -не сист. отсч. были часы и шли они синхронно.
Надо бы было сказать $\nexists$ что скор. движ. часов во время переноса часов не влияет на ход времени.



$\frac{r}{c}$ – выставлено такое время, т.о. можно провести синхрониз часов в и.с.о



l_0 – длина масштаба в S.

Как измерить длину предмета движущегося отн. нас?

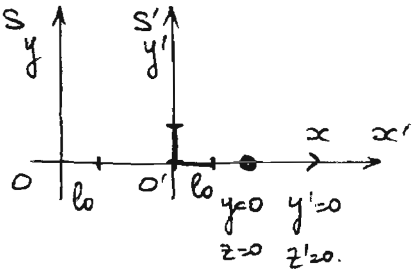
Длина движ. масштаба
определение в один и тот же момент времени
по часам с.о. в кот. он движется.

Преобразование Лоренца.

Постулаты СТО.

1. Линейность преобразований ($\Rightarrow$ из однородн. пр-ва и времени).
2. Скорость распрагр света во всех и.с.о постоянна
3. $V=\text{const}$ (ограничение)
4. Никакими измерениями нельзя отличить одну и.с.о. от др.

Исходя из этих постулатов мы найдем преобраз Лор.



В нач. момент времени начала коорд. совпад. $t=0$, $t'=0$.

$$\begin{cases} y = \alpha y' + \beta z' \\ z = \alpha_1 \cdot y' + \beta_1 \cdot z' \end{cases}$$

избавимся от пространственного поворота, считая что $y \uparrow\uparrow y'$, $z \uparrow\uparrow z'$

$$\begin{cases} y = \alpha \cdot y' \\ z = \beta \cdot z' \end{cases} \quad \alpha=\beta. \quad \begin{cases} y = \alpha y' \\ z = \alpha z' \end{cases}$$

Выясним суть α.

1) Возьмем I lam в S' $\quad y_1'=0 \quad y_2'=1.$; $\quad y_1 = \alpha \cdot y_1' = 0$

$y_2 = \alpha \cdot y_2' = \alpha$.

2) Возьме I в S $\quad y_1=0$; $y_2=1$

$$y_1' = \frac{y_1}{\alpha} = 0 \;;\; y_2' = \frac{y_2}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}.$$

Надо потребовать $\frac{1}{\alpha}=\alpha$ т.е. $\alpha=1$.

Когда $x'=0$ $x=0$ $\Rightarrow$ связь $x' = \gamma'(x - vt)$ $(*)$

$x=0$ $x' = -vt'$ $\Rightarrow$ $x = \gamma\cdot(x' + vt')$ $(**)$

Убедимся, что $\gamma = \gamma'$!
Пусть в S' масштаб лежит на x.

1) $x_1' = 0$, $x_2' = l_0$: $l_0 = x_2' - x_1'$.

В один и тот же момент вр. по часам в S н. засечем начало и конец.

$t=0$ из $(*)$ $x_1 = \frac{x_1'}{\gamma'} = 0$; $x_2 = \frac{x_2'}{\gamma'} = \underline{\frac{l_0}{\gamma'}}$

2) $x_1 = 0$ $x_2 = l_0$; $l_0 = x_{02} - x_1$

$t'=0$: $x_1' = \frac{x_1}{\gamma} = 0$; $x_2' = \frac{x_2}{\gamma} = \underline{\frac{l_0}{\gamma}}$ $\gamma = \gamma'$ чтобы не было противоречия в п. 1 постулатов СТО.

Тогда. $\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ x' = \gamma(x - vt) \end{cases}$ Найдем γ рассматривая как событие - распростран. света.

$t = t' = 0$. $S: t : x = ct$
$S': t' : x' = ct'$
$\begin{cases} ct = \gamma t'(c + v) \\ ct' = \gamma t(c - v) \end{cases}$

$c^2tt' = \gamma^2 tt' c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$, откуда

$$\gamma^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \quad \gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Выберем „+":

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Выразим из сис $t'(x;t')$

$x' = \gamma^2(x' + vt') - \gamma vt$

$t = \gamma t' + x'(\gamma^2 - 1)\frac{1}{\gamma v} = \gamma\left(t' + \frac{x'}{v}\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)\right)$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$;

Если $c \to \infty$ ($\frac{v}{c} \ll 1$)

$x = x' + vt' = x' + vt$, $t = t'$

$y' = y$, $z' = z$.

(преобразование Галилея.)

Следствие вытекающие из пр. Лоренца.

1. Сокращение длины.

$x_2' - x_1' = l_0$ (покоится в S'), $x_1' = \dfrac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $x_2' = \dfrac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$x_2' - x_1' = \dfrac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = l_0$; $l = l_0 \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$

Длина масштаба понятие относительное.

2. Лоренцевское замедление времени.

Пусть в S' (в x') последовательно происходят два события в моменты времени t_1' и t_2'.
Разница во времени по часам системы S' (часы нах-ся рядом с событием) наз-ся собств. время.

$t_2' - t_1' = \Delta t_0$

Какой пром-к времени в др. сист. отсч. ?

$t_1 = \dfrac{t_1' + v/c^2 \cdot x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ — в одном и том же месте ; $t_2 = \dfrac{t_2' + \frac{v}{c^2} \cdot x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$; $\Delta t = \dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Собственное время течет медленнее.

3. Одновременность.

Пусть в S' в момент t' происходят 2 события в т-ках x_1' и x_2'. Как же в S?

$$t_1 = \frac{t' + \frac{v}{c^2} \cdot x_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \;;\quad t_2 = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x_2'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \;;\quad t_2 - t_1 = \frac{\frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Если события происходят в один момент времени в одной и той же т-ке – то такие события одновременны в люб. др. и.с.о.

$$V_x = \frac{dx}{dt} \;;\; V_y = \frac{dy}{dt} \;;\; V_z = \frac{dz}{dt} \;;\; V_x' = \frac{dx'}{dt'} \quad V_y' = \frac{dy'}{dt'} \quad V_z' = \frac{dz'}{dt'}$$

Т.к. преобраз. линейные то и диф-алы удовлетвор. пр. Лор

$$dx = \frac{dx' + v\,dt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \;;\; dt = \frac{dt' + v/c^2 \cdot dx'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \;;\; \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v\,dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = V_x$$

$$V_x = \frac{V_x' + v}{1 + \frac{v \cdot V_x'}{c^2}} \;;\qquad dy = dy' \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy' \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}$$

$$V_y = \frac{V_y' \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v \cdot V_x'}{c^2}}$$

релятивистский закон сложения скоростей.

$$V_z = \frac{V_z' \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v \cdot V_x}{c^2}}$$

В случ. $c \to \infty$

классич. з-н слож. скоростей $\begin{cases} V_x = V_x' + v \\ V_y = V_y' \\ V_z = V_z' \end{cases}$

Проверим, что $c = const$ во всех и.с.о.

Пусть в S' свет распростр. вдоль X' со скор. c.

S': $V'_x = c \quad V'_y = V'_z = 0$

S: $V_y = V_z = 0 \qquad V_x = \dfrac{c+V}{1+\frac{cV}{c^2}} = c \Rightarrow c = const.$

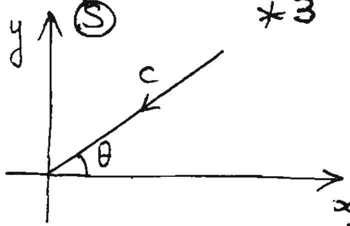
Пусть 1) $V'_x = c$; $V < c$
$V'_y = 0$
$V'_z = 0$ получим тоже самое.

2) $V'_x = c - \alpha$, $\alpha > 0$; $V_y = V_z = 0$
$V = c - \beta$, $\beta > 0$
$V'_y = V'_z = 0$.

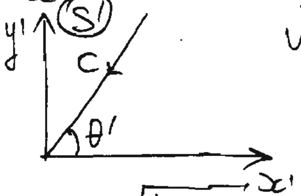
$$V_x = \frac{c-\alpha+c-\beta}{1+\frac{(c-\alpha)(c-\beta)}{c^2}} = \frac{2c-(\alpha+\beta)}{2-\frac{(\alpha+\beta)}{c}+\frac{\alpha\beta}{c^2}}$$

$$V_x = \frac{2-(\alpha+\beta)/c}{2-\frac{(\alpha+\beta)}{c}+\frac{\alpha\beta}{c^2}}\cdot c < 1\cdot c < c$$

• Абберация света



$*3$ $V_x = -c\cdot\cos\theta$
$V_y = -c\cdot\sin\theta$



$V'_x = -c\cdot\cos\theta'$
$V'_y = -c\cdot\sin\theta'$

$$-c\cdot\sin\theta = \frac{-c\cdot\sin\theta'\cdot\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-\frac{Vc\cos\theta'}{c^2}} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{\sin\theta'\cdot\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-\frac{V}{c}\cdot\cos\theta'}$$

$V \ll c$, выбросим $\frac{V^2}{c^2}$

$$\sin\theta - \sin\theta' = \sin\theta' \cdot \left(\frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta'} - 1 \right) \approx \sin\theta' \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta' - 1 \right) = \frac{v}{c}\sin\theta' \cdot \cos\theta' < 1.$$

$$2\sin\frac{\theta - \theta'}{2} \cdot \cos\frac{\theta + \theta'}{2} = \frac{v}{c}\sin\theta' \cdot \cos\theta'$$

$\theta \approx \theta'$ $\qquad \theta - \theta' = \frac{v}{c}\sin\theta' = \frac{v}{c}\sin\theta$, абберация света $\varphi = \frac{v}{c}\sin\theta$

Направление скорости в разных С.О. разная.

• Инвариантные величины.

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Поперечные размеры не изменяются. $\quad v = v_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

Все эти ф-лы подтверждены экспериментами.

Время жизни движущегося μ-мезона $\tau_{дв.} = \frac{\tau_{пок}}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$

Экс. измерение $\tau_{пок} = 2 \cdot 10^{-6}$ сек.

Если $\tau_{дв.} \simeq \tau_{пок}$: до распада он бы прошел путь :

$l_0 = 3 \cdot 10^{10} \frac{см}{сек} \cdot 2 \cdot 10^{-6}$ сек $= 600$ м. Наблюдения показывают что

μ-мезоны проходят путь $l \simeq 20$ км. ; $\tau_{дв.} = \frac{20 \text{ км}}{3 \cdot 10^5 \frac{км}{сек}} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{100}{3} \approx 33\tau_{пок}$

Одна из осн задач. СТО - нахождение inv. величин.

1) Скорость света в вакууме. (by def)
2) Интервал м-ду событиями := ~~$S_{12} = \sqrt{c^2(t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 -}$~~

$$S_{12} = \left(c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \right)^{1/2}$$

$S_{12} \overset{?}{=} S'_{12}$ - используем. преобраз. Лоренца:

$$S_{12}=\left[c^2\left(\frac{t_2'+\frac{v}{c^2}x_2'}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{t_1'+\frac{v}{c^2}x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2-\left(\frac{x_2'+vt_2'}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{x_1'+vt_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2-(y_2'-y_1')^2-(z_2'-z_1')^2\right]^{1/2}$$

$$\overset{''}{1} \qquad \overset{''}{2}$$

$$1-2:\ \frac{c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\left\{(t_2'-t_1')^2+\frac{v^2}{c^4}(x_2'-x_1')^2-\cancel{2\frac{v}{c^2}(t_2'-t_1')(x_2'-x_1')}\right\}-$$

$$-\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\left\{(x_2'-x_1')^2+v^2(t_2'-t_1')^2-\cancel{2v(x_2'-x_1')(t_2'-t_1')}\right\}=$$

$$=\frac{c^2}{\cancel{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{(t_2'-t_1')^2\cdot\cancel{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\right\}+\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}(x_2'-x_1')^2\left(\frac{v^2}{c^2}-1\right)=$$

$$=c^2(t_2'-t_1')^2-(x_2'-x_1')^2.$$ Тогда

$$S_{12}'=\left[c^2(t_2'-t_1')^2-(x_2'-x_1')^2-(y_2'-y_1')^2-(z_2'-z_1')^2\right]^{1/2}.$$

Интервал – абсолютная величина

1) Пусть $S_{12}^2>0$; $S_{12}=S_{12}'=\sqrt{c^2t_{12}^2-l_{12}'^2}$

можно найти такую с.о. что $l_{12}'=0$. тогда $t_{12}'=\frac{S_{12}}{c}$.

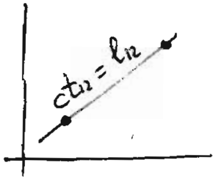
Интервалы для кот-ых $S_{12}^2>0$ наз-ся времениподобные интервалы.

2) $S_{12}^2<0$; $S_{12}=\sqrt{c^2t_{12}'^2-l_{12}'^2}$, $l_{12}'>ct_{12}'$

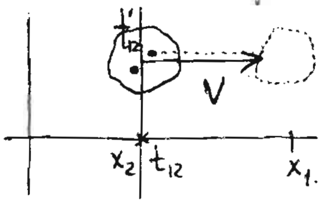
Можно найти с.о. в кот-ой $t_{12}'=0$. ; $S_{12}=\sqrt{-l_{12}'^2}$

Интервалы для кот-ых $S_{12}^2<0$ наз-ся пространственноподобн.

3. $S_{12}=0$.



распростр. света характеризуется $S_{12}=0$.



$$v(x_2-x_1)=l_{12}v$$
$$c(t_2-t_1)=t_{12}c$$
$$c(t_2-t_1)>v(x_2-x_1).$$

Инт. м-ду ∞-но близкими событиями.

$$dS=\left[c\,dt'^2-dx^2-dy^2-dz^2\right]^{1/2}=\left[c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2\right]^{1/2}$$

$dx=dy=dz$; $dt'=\underline{\underline{dt_0}}=\dfrac{dS}{c}$ собственное время. $\quad \underline{t_0=\frac{1}{c}\int dS}$ — inv.

$$dS=\left[c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2\right]^{1/2}=c\,dt\cdot\left(1-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2dt^2}\right)^{1/2}=$$

$=c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}dt$; $\quad \dfrac{dS}{c}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt$ $\quad$ е. вместо v — v большое $\Rightarrow$ получаем собственное время.

Величина $\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}dt=\text{inv}$.

$$\Delta t_0=\int_0^t\left(1-v^2/c^2\right)^{1/2}dt$$ е. $v\neq v(t)$ то в СТО это собственное время

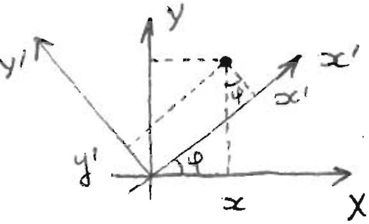
Инвариантность физ. з-нов зависит от св-в простр-ва.

1) $A=B$ скалярная запись какого-то з-на
тогда $A'=B'$.

2) $\vec{A}=\vec{B}$, $\vec{A}'=\vec{B}'$ при повороте компоненты разных векторов меняются одинаковым образом.

3). $T_{ik}=B_{ik}\ \rightarrow\ T'_{ik}=B'_{ik}$

1), 2), 3) — inv-ность з-нов отн. пространственного поворота.



$$x = x'\cos\varphi - y'\cdot\sin\varphi$$

$$y = x'\cdot\sin\varphi + y'\cdot\cos\varphi.$$

$$x_\alpha = a_{\alpha\beta}\, x'_\beta \,, \quad a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$ матрица поворота.

Компонентами вектора A, A_α наз-ся величины преобразующиеся, при повороте, по правилу

$$A_\alpha = a_{\alpha\beta} A'_\beta$$

Тензор (II ранга) $$T_{\alpha\beta} = a_{\alpha\nu}\, a_{\beta\mu}\, T_{\nu\mu}$$

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$; $m\ddot{x}_\alpha = F_\alpha$; $m a_{\alpha\beta}\ddot{x}'_\beta = a_{\alpha\mu} F'_\mu$ (идет суммирование по β и по μ).

заменим $\beta \to \mu$; $a_{\alpha\beta}(m\ddot{x}'_\beta - F_\beta) = 0$. т.к. $a_{\alpha\beta}$ - не нулевая.

то $m\ddot{x}'_\beta = F_\beta$ $\Rightarrow$ з-н Ньютона inv. отн. поворота.

З-ны природы inv. отн. преобраз. Лоренца. Как это записать?

Будем исходить из inv-сти интервала отн.

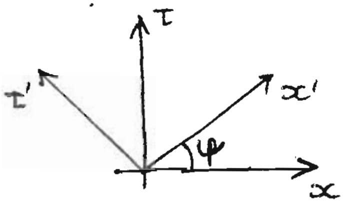
$dS^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$; Формально введем $\tau = ict$, тогда

$-dS^2 = d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ ← квадрат расст. в 4-мерн. сист. коорд.

Расст. м-ду т-ками не меняется при ||-ном переносе и поворот.

Преобраз. Лоренца соотв. повороту в 4-мерн.

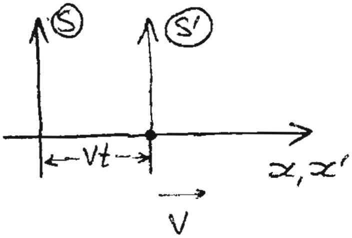
Мы должны рассмотреть поворот в пл-сти $x\tau$



$y = y'$ $\quad$ $z = z'$ $\qquad$ $\begin{cases} x = x'\cos\psi - \tau'\sin\psi \\ \tau = x'\sin\psi + \tau'\cos\psi \end{cases}$

Запишем это преобр. для т. $\tau' = 0$.

$$x = x'\cos\psi \qquad \tau = x'\sin\psi \qquad \frac{x}{\tau} = \operatorname{ctg}\psi$$



$$\operatorname{ctg}\psi = \frac{Vt}{ict}$$

$$x' = 0 \qquad x = -\tau'\sin\psi \qquad \tau = \tau'\cos\psi \qquad \frac{x}{\tau} = -\operatorname{tg}\psi; \quad \operatorname{tg}\psi = i\frac{V}{c}$$

$$\begin{cases} x = x'\cos\psi - \tau'\sin\psi \\ \tau = x'\sin\psi + \tau'\cos\psi \end{cases}$$

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\sin\psi = \operatorname{tg}\psi\cdot\cos\psi = \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' - i\frac{V}{c}\tau'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ \tau = \dfrac{\tau' + i\frac{V}{c}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \qquad \tau' = ict' \qquad \begin{aligned} x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ t &= \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} ict &= \tau \\ ct &= x_0 \end{aligned}\right\} \tau = ix_0$$

Иногда вводят 4-мерн. сист. коорд.:

$$\begin{cases} ct = x^0 \\ x = x^1 \\ y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases} \qquad x^1 = \frac{x'^1 + (v/c)x'^0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; \quad x^0 = \frac{x'^0 + (v/c)x'^1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; \quad \begin{matrix} x^2 = x'^2 \\ x^3 = x'^3. \end{matrix}$$

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

Обр. переход: $x'^1 = \frac{x^1 - (v/c)x^0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$; $x'^0 = \frac{x^0 + (v/c)x^1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ $\quad \begin{matrix} x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3. \end{matrix}$

Компоненты 4-вектора $x^i(x^0, \vec{r})$.

Связь $x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k; \qquad \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 00 & 01 & 02 & 03 \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ 10 \\ 20 \\ 30 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; & \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; & 0; & 0 \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; & \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; & 0; & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1. \end{pmatrix} \end{array}$$

контр. вариант. вектор.

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k$$

его з-н. преобразования.

контровариантный тензор II. ранга.

$$T'^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} T'^{mn}$$

Пусть φ скаляр

4-мерн. градиент. $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}$

матрица $\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}$ отлич. от $\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}$ заменой $V \to -V$.

4-х мерн A_i – коварисантный; T_{ik} – 4мерн тензор (ковариантн).

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k \quad ; \quad T_{ik} = \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} T'_{mn}$$

Появляются тензоры смешанного типа.

$T^i{}_k \quad (T^i{}_k \neq T^k{}_i)$ их закон преобраз. „смешан."

$$T^i{}_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} T'^m{}_n$$

$S^{ik} = S^{ki}$ (симметрия по индексам). 10 независимых компонент.

абс. симметр. $\left(n \right)$ $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ – ~~нез~~ незави компонент.

абс. антисимметр. $\left(\cdots \right)$ $A^{ii} = -A^{ii} = 0$. $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \dots$

$$dS^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$A_i T(i,k) = B^k$ – док-ем что $T(i,k)$ – тензор.

не знали что это

$$\frac{\partial x'^m}{\partial x^i} A'_m T(i,k) = \frac{\partial x^k}{\partial x'^s} B'^s \Big| \cdot \frac{\partial x'^n}{\partial x^k}$$

$$\frac{\partial x'^n}{\partial x'^s} = \delta^n_s$$

Справа: B'^n ; $\frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} T(i,k) A'_m = T'(m,n) \cdot A'_m$

$$T'(m,n) = \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} T(i,k)$$

$$T'^{mn} = \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} T^{ik}$$

g_{ik} – метрический тензор.

В. И.С.О. имеем один и тот же вид (в силу

$A^i \delta_i^k = A^k \Rightarrow \delta_i^k$ - смешанный тензор.

$$\delta_i^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тензоры обратные данному.

$T^{ik} T_{kl} = \delta_l^i$ по заданному T^{ik} из сист. ур-ний находим компоненты T_{kl}.

$g^{ik} g_{kl} = \delta_l^i$; связь м-ду ковар. и контравар.

$$A^i = g^{ik} A_k$$

$A^i = g^{ik} A_k \,|\cdot g_{il} \quad A^i g_{il} = A_l$

$g_{ik} dx^k = dx_i$

$dS^2 = dx_i dx^i$

суммирование надо проводить по индексам различ. вариантности, тогда получим тензор.

$$A^i B_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} B'_l = \frac{\partial x'^l}{\partial x'^k} A'^k B'_l = \delta_k^l A'^k B'_l = A'^k B'_k$$

$S^{ik} g_{kl} = S^i{}_l$, для симметр. тенз. $S^i{}_l = S_l{}^i$

Введем 4-мерн. контр.вар. вектор скорости.

$u^i \equiv \frac{dx^i}{dS} \qquad u^0 = \frac{dx^0}{dS} = \frac{c\,dt}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ v - 3-мерн. скорость частицы.

если пробегает 4 знач. - латинские буквы.
3 - греческими.

$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{dx^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt} = \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$; Итого $u^i\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$

4-мерн. ускорение $w^i = \frac{du^i}{ds} = \frac{d^2x^i}{ds^2}$

$$u^i u_i = g_{ik} u^i u^k = \frac{g_{ik} dx^i dx^k}{ds^2} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1 \qquad u^i u_i = 1$$

Продиф. последнее р-во:

$$\frac{du^i}{ds} u_i + u^i \frac{du_i}{ds} = 0 \quad , \quad u_i \frac{du^i}{ds} = u_i w^i.$$

$$A_i = g_{ik} A^k \qquad g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_0 = g_{0k} A^k = g_{00} A^0 = A^0$$

$$A_1 = g_{1k} A^k = g_{11} A^1 = -A^1$$

$$A_2 = g_{2k} A^k = g_{22} A^2 = -A^2$$

$$A_3 = g_{3k} A^k = g_{33} A^3 = -A^3$$

$A^i (A^0, \vec{A})$

$A^1 = A_x$, A

Релятивистская механика.

Принцип наименьшего действия.

Можно определить S, кот-ый для действительного движения наименьший, а $\Rightarrow$ его вариация $= \emptyset$.

S действие должен иметь вид inv. по отн. к преобраз. Лоренца $\Rightarrow$ имеет вид. скаляра.

Диф-ал под. S должен быть inv., для свобод. частицы это ds.

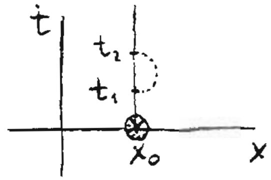
$$S = -\alpha \int_a^b ds \quad , \quad \alpha > 0.$$

Т-ка кот-ая характеризует событие в 4-пр-ве. - мировые т-ки. Движение - по мировой линии.

$a(x_1, y_1, z_1, t_1)$, $b(x_2, y_2, z_2, t_2)$

" – " - чтобы был min

Движ. - вдоль кон-ой $\delta S = 0$.



движущиеся часы отстают от покоящихся.
мировая линия прямая $\|$-ая t.

? неинерц. с.о часы уходят и возвр.

α - характеризует индивидуальность частицы.

$$ds = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt \; ; \quad S = -\alpha c\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt \qquad S = \int_{t_1}^{t_2} L(t)\,dt$$

$L(t)$ - ф. Лагранжа. $\quad L_{кл} = \frac{mv^2}{2}$;

$$L = -\alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = -\alpha c\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c} = \frac{\alpha v^2}{2c}$$

Видно, что $L \to L_{кл}$ если $m = \alpha/c$ $\quad v \ll c$ (const из L м. выбросить).

Т.о. $L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, и $\quad S = -mc\int_a^b ds$

Зная L м. определить E, p - частицы и т.д.
Определим импульс релятив. частицы.

By def. $\quad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $\quad v \ll c \quad \vec{p}_{кл} = m\vec{v}$

В класс. $\quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \vec{F}_{кл} = m\vec{a} \quad$ в релятив

1) $\vec{v}$ меняется только по направл. $\quad \vec{v} = \vec{\tau}(t)\cdot v_0$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}}{dt}$$

2) $\vec{v}$ меняется по величине $\quad \vec{v} = \vec{\tau}_0 \cdot v_0(t)$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m\vec{\tau}_0\left(\frac{dv}{dt}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mv\vec{\tau}_0\cdot\left\{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\right\}\cdot\left(-2\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}\right)$$

$\vec{I}_0$ – под производную.

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{m\frac{d\vec{v}}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}\right\}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}=\frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Т.о. m не явл. коэф-том пропорциональности м-ду силой и ускорением.

Вычислим E свобод. частицы.

$$\mathcal{E}=\vec{v}\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}-L \quad ; \quad \mathcal{E}=\vec{p}\vec{v}-L=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}>0$$

Если $v=0$, то $\mathcal{E}=mc^2$.

(впервые это соотн. было написано А. Пуанкаре, а не А. Эйнштейном.)

Мы нигде не пользовались элементарностью свобод. частицы. мы лишь только учли 0-ое воздействие внешних сил т.е. годится и для системы частиц на кот-ую не действуют внешн. силы.

Если в системе м-ду частицами $\exists$ взаимодействие то в $\mathcal{E}=Mc^2$ входит и кин. энергия и энерг. взаимод., т.е. в $M\neq\sum_\alpha m_\alpha$ $\Rightarrow$ в релятив. мех-нике отсутствует з-н сохр. массы.

Когда пишут m_0 – масса покоя, а $m(\vec{v})=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, тогда бы масса была бы различ. в разл. и.с.о.

Частицы с $m\neq0$ не могут двигаться со скор. $\geq c$.
Если ~~масса~~ $m=0$ тогда только со скор. c. (фотон, нейтрино)

$$\mathcal{E}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad \mathcal{E}^2=\frac{m^2c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{m^2c^4\left(1-v^2/c^2+v^2/c^2\right)}{1-v^2/c^2}=m^2c^4+\frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot c^2$$

$$\mathcal{E}=c\sqrt{p^2+m^2c^2}$$

$m=0$ $\quad\mathcal{E}=cp$. – для фотона.

1) $v \ll c$: $p \simeq mv \ll mc$; $\mathcal{E} \simeq mc^2\sqrt{1+\left(\frac{p}{mc}\right)^2} = mc^2\left(1+\frac{p^2}{2m^2c^2}\right) =$

$= mc^2 + \frac{p^2}{2m}$

(энерг. покоя) (энерг. в кл. случ.)

2) $v \lesssim c$: $p \gg mc$, $\mathcal{E} = pc$

ультрарелятив. частица

Энергия выраженная ч-з импульс наз-ся ф. Гамильтона.

$\mathcal{H} = c\sqrt{p^2+m^2c^2}$; $v \ll c$ $\mathcal{H} = mc^2 + \mathcal{H}_{кл}$; $\mathcal{H}_{кл} = \frac{p^2}{2m}$

Найдем ур-е движения в 4-мерн. виде.

Будем варьировать S действие. $S = -mc\int_a^b ds$

$\delta S = -mc\int_a^b \delta ds$; $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k = dx_i dx^i$

$2ds\,\delta ds = dx^i\,\delta dx_i + dx_i\,\delta dx^i$; $A^iB_i = A_iB^i$

$2ds\,\delta ds = 2dx_i\,\delta dx^i$; варьирование и дифф-ние независимые операции

$2ds\,\delta ds = 2dx_i\,d\delta x^i$

$\delta ds = \frac{dx_i}{ds}d\delta x^i = u_i\,d\delta x_i$;

$\delta S = -mc\int_a^b u_i\,d\delta x_i = -mc\int_a^b\{d(u_i\delta x^i) - \delta x^i du_i\}$

$\delta S = -mcu_i\,\delta x_i\Big|_a^b + mc\int_a^b \frac{du_i}{ds}\delta x^i ds$

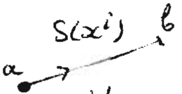
вариации на концах нет $\Uparrow$ $\delta S = 0$; $\frac{du_i}{ds} = 0$ $\frac{du^i}{ds} = 0.$

$\frac{du^0}{ds} = \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0$; $u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$$0 = \frac{du^\alpha}{ds} = \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\frac{d}{dt}\,\frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ ; \qquad \boxed{\begin{matrix} v = const \\ \vec v = const \end{matrix}} \rightarrow \begin{matrix} \mathcal{E} = const & \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0 \\ \vec p = const & \frac{d\vec p}{dt} = 0 \end{matrix}$$

$\boxed{7}$

насчет $\vec v, v = cons.$



$$\delta x^i|_a = 0 \quad \delta x^i|_b = \delta x^i \ ; \qquad \delta S = -mcu_i\,\delta x^i \qquad mcu_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i}$$

$$\mathcal{E}_{кл} = -\frac{\partial S_{кл}}{\partial t}\ , \quad \vec P_{кл} = \frac{\partial S_{кл}}{\partial \vec r_*}\ ; \qquad mcu_0 = -\frac{\partial S}{c\,\partial t} = \frac{1}{c}\mathcal{E}$$

$$mcu_0 = \frac{\mathcal{E}}{c}$$

$$mcu_\alpha = -\frac{\partial S}{\partial x^\alpha}\ , \quad mcu^\alpha = \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}\ ;$$

$$mc\frac{\vec v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\partial S}{\partial \vec r}\ , \quad \vec P = \frac{\partial S}{\partial \vec r} \qquad mcu^i \equiv p^i\ ; \qquad p^i\left\{\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec P\right\}$$

Мы знаем, что для контравар. з-ны преобр имеют вид:

$$A^0 = \frac{A'^0 + (v/c)A'^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ ; \quad A^1 = \frac{A'^1 + \frac{v}{c}A'^0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ ; \quad A^2 = A'^2\ ; \quad A^3 = A'^3 .$$

$$p^0 = \frac{p'^0 + v/c\cdot p'^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}' + vP'_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ ;$$

$$p^1 = \frac{p'^1 + \frac{v}{c}p'^0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \longrightarrow P_x = \frac{P'_x + \frac{v}{c^2}\mathcal{E}'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ ; \quad P_y = P'_y\ , \quad P_z = P'_z$$

Из определения 4-импульса: $p^i p_i = m^2c^2 u^i u_i = m^2 c^2$. [*].

Просуммирую по i: (т.к. $u^i u_i = 1$.)

$$p^0 p_0 + p^\alpha p_\alpha = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2$$

тут надо

Из ур-я [*] записать ур-е Гам.-Якоби.

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i} \quad ; \quad p^i p_i = g^{ik} p_i p_k = g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k}$$

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2 c^2 = 0$$ – ур-е Гамильтона-Якоби в 4-мерн. виде.

Просуммируем по i и по k.

$$\underset{1}{g^{00}} \left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 + \underset{-1}{g^{11}} \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 + \underset{-1}{g^{22}} \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 + \underset{-1.}{g^{33}} \left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2 - m^2 c^2 = 0.$$

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - (\mathrm{grad}\, S)^2 - m^2 c^2 = 0.$$ 3-мерная ф-ма ур-е Гам.-Як. в релятив. мех-ке.

$$\frac{p^2}{2m} = \varepsilon \rightarrow \quad \frac{\partial S_{кл}}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\mathrm{grad}\, S_{кл})^2 = 0$$

$v \ll c$: $\quad \varepsilon = mc^2 + \varepsilon_{кл} \quad ; \quad -\frac{\partial S}{\partial t} = mc^2 - \frac{\partial S_{кл}}{\partial t}$

$$S = S_{кл} - mc^2 t.$$

$v \ll c$: $$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S_{кл}}{\partial t} - mc^2 \right)^2 - (\mathrm{grad}\, S_{кл})^2 - m^2 c^2 = 0.$$

$$\frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{\partial S_{кл}}{\partial t}\right)^2 - 2 \frac{\partial S_{кл}}{\partial t} mc^2 + m^2 c^4 \right] - (\mathrm{grad}\, S_{кл})^2 - m^2 c^2 = 0.$$

В кл. $c \to \infty$.

$$\frac{\partial S_{кл}}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\mathrm{grad}\, S_{кл})^2 = 0$$

Энергия и импульс величины относительные – разные значения в разн. сист. отсчета.

Распад сложной частицы.

Рассм. СО в кот-ой исход. частица покоится ⇒ ее энергия есть Mc^2 (система центра инерции).
Доп-тим что частица распалась на две, $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$.

$Mc^2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$. Надо найти ~~[illegible]~~ энергии разлетевшихся частиц, если известны их массы m_1 и m_2.

$$Mc^2 = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$ (если частицы не взаимод.)

Чтобы произошел самопроизвольн. распад надо чтобы $M \geq \sum_i m_i$; если $M < \sum m$

Величина $\sum m - M = \Delta m$ — дефект. масс.
Часть массы при соударениях переходит в энергию связи

$\Delta m c^2$ — энергия связи.

В той системе где 1ая частица покоилась ранее:

$\vec{p} = 0$. з-н сохр. импульса $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$. т.е. $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ ⇒

$$\Rightarrow \quad c^2 p_1^2 = c^2 p_2^2 \ ; \quad \mathcal{E}_1^2 - m_1^2 c^4 = \mathcal{E}_2^2 - m_2^2 c^4 \ ;$$

$$(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)\cdot(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) = (m_1^2 - m_2^2)c^4 \ ;$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = \dfrac{m_1^2 - m_2^2}{M} c^2 \\ \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = Mc^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \mathcal{E}_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} c^2$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M} c^2$$

Решим эту задачу в 4-мерн. виде.

Запишем з-н сохр. в 4-мерн. виде.

$$p^i = p_1^i + p_2^i$$

1) $p^i - p_1^i = p_2^i$ (возведём в квадрат ⇒ умн. на ковариант.).

опустим индексы вниз. $p_i - p_{1i} = p_{1i}$

перемножим два р-ва: $p^i p_i - p^i p_{1i} - p_1^i p_i + p_1^i p_{1i} = p_2^i p_{2i}$

$\phantom{p^i p_i - p^i p_{1i} - {}} \overset{\parallel}{p_{1i} p_i}$ (т.к. по i идём Σ-ние).

$$p^i p_i + p_1^i p_{1i} - 2p^i p_{1i} = p_2^i p_{2i}$$

$$M^2c^2 + m_1^2c^2 - 2\frac{Mc^2}{c}\cdot\frac{\varepsilon_1}{c} = m_2^2c^2 \quad ; \quad \varepsilon_1 = \frac{M^2+m_1^2-m_2^2}{2M}c^2$$

- $\varepsilon_1, m_1 \longrightarrow \bullet\ m_2$ (покоится в Л-сист.).

$M \geq \sum m$; M - масса составной частицы.
две частицы расм. как одно целое.

$\vec{v} = \frac{c^2\vec{p}}{\varepsilon}$; скорость ц.и.

$$\vec{V} = \frac{c^2\sum\vec{p}}{\sum\varepsilon} = \frac{c^2 p_1}{\varepsilon_1 + m_2c^2}$$ скор. центра инерц. отн. Л-сист.

$$M^2c^4 = \varepsilon^2 - c^2p_1^2 = (\varepsilon_1 + m_2c^2)^2 - (\varepsilon_1^2 - m_1^2c^4) =$$
$$= \varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1 m_2c^2 + m_2^2c^4 - \varepsilon_1^2 + m_1^2c^4$$

- Упругое столкновение релятив. частиц.

Внутр. состояние частиц не меняется.

В Л-сист. $\quad m_1\ \varepsilon_{10}\ \vec{p}_{10} \longrightarrow \bullet\ m_2 \dashrightarrow x \quad$ Расм. задачу в с.ц.и.

$$\vec{V} = \frac{c^2\vec{p}_{10}}{\varepsilon_{10} + m_2c^2}$$ (показать что это действительно скорость ц.и., перейти в сист. ц.и. - преобр. Лор. и показать $\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0$.

$$\vec{P}'_{20x} = -\frac{m_2 V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \; ; \quad \mathcal{E}'_{20} = \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$ (V - известно).

$\mathcal{E}_{20}$ после столки в Л-сист. (без штриха) равняется:

$$\mathcal{E}_{20} = \frac{\mathcal{E}'_{20} + V\cdot P'_{20x}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$ (преобр. Лоренца).

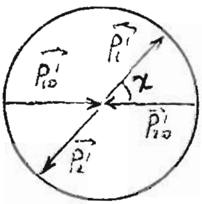
$\mathcal{E}'_{10} + \mathcal{E}'_{20} = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2$ з-н сохр. энерг. но в ~~Л-сист~~ Ц-сист.

$$c^2\sqrt{p_{10}'^2 + m_1^2c^4} + c^2\sqrt{p_{20}'^2 + m_2^2c^4} = c\sqrt{p_1'^2 + m_1^2c^4} + c\sqrt{p_2'^2 + m_2^2c^4}$$

до столк. в Ц-сист. $\vec{P}'_{10} + \vec{P}'_{20} = 0$ после столк. $\vec{P}'_1 + \vec{P}'_2 = 0$.

$$\sqrt{p_{10}'^2 + m_1^2c^4} + \sqrt{p_{10}'^2 + m_2^2c^4} = \sqrt{p_1'^2 + m_1^2c^4} + \sqrt{p_1'^2 + m_2^2c^4}$$

Это выполняется, когда $p'_{10} = p'_1 = p'_{20} = p'_2$



x, x'

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\mathcal{E}'_2 + V P'_{2x}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\mathcal{E}'_{20} - V P'_2\cos\chi}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\mathcal{E}'_{20} - V P'_{20}\cos\chi}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} =$$

$$= \frac{m_2c^2 - V\cdot m_2 V\cos\chi}{1-\frac{V^2}{c^2}} = \frac{m_2c^2\left[1-\frac{V^2}{c^2} + \frac{V^2}{c^2}(1-\cos\chi)\right]}{1-\frac{V^2}{c^2}} =$$

$$= m_2c^2 + \frac{\left(\frac{V^2}{c^2}\right)}{1-\frac{V^2}{c^2}} m_2c^2(1-\cos\chi)$$

энергия 2-ой част. до столк.

энергия кот. ая перешла от 1-ой част. ко 2-ой в рез-те столки.

$$\frac{V^2}{c^2}=\frac{c^2p_{10}^2}{(\varepsilon_{10}+m_2c^2)^2}=\frac{\varepsilon_{10}^2-m_1^2c^4}{(\varepsilon_{10}+m_2c^2)^2}\ ;\quad 1-\frac{V^2}{c^2}=\frac{\varepsilon_{10}^2+2\varepsilon_{10}m_2c^2+m_1^2c^4-\varepsilon_{10}^2+m_1^2c^4}{(\varepsilon_{10}+m_2c^2)^2}$$

$$\varepsilon_2=m_2c^2+\frac{m_2c^2\cdot(\varepsilon_{10}^2-m_1^2c^4)}{(m_1^2c^2+m_2^2c^2+2m_2\varepsilon_{10})c^2}(1-\cos\chi).$$

#4 Энергия налетающей частицы после столкновения

$$\varepsilon_1=\varepsilon_{10}-\frac{m_2(\varepsilon_{10}^2-m_1^2c^4)(1-\cos\chi)}{m_1^2c^2+m_2^2c^2+2m_2\varepsilon_{10}}$$

$\delta\varepsilon$ – энергия переданная от 1-ой ч. ко 2-ой

$\delta\varepsilon$ – max. когда $\chi=\pi$.

$$\delta\varepsilon=\frac{2m_2(\varepsilon_{10}^2-m_1^2c^4)}{m_1^2c^2+m_2^2c^2+2m_2\varepsilon_{10}}\ ;\quad \varepsilon_{1min}=m_1c^2+(\varepsilon_{10}-m_1c^2)\cdot\frac{m_1^2c^2+m_2^2c^2+2m_2\varepsilon_{10}-2m_2(\varepsilon_{10}+m_1c^2)}{m_1^2c^2+m_2^2c^2+2m_2\varepsilon_{10}}$$

$$\frac{\varepsilon_{1min}-m_1c^2}{\varepsilon_{10}-m_1c^2}=\frac{T_{1min}}{T_{10}}=\frac{(m_1-m_2)^2c^2}{m_1^2c^2+m_2^2c^2+2m_2\varepsilon_{10}}$$

Если для налетающей: $v\ll c$: $\varepsilon_{10}=m_1c^2+\cancel{\frac{m_1v^2}{2}}$; $\frac{T_{1min}}{T_{10}}=\left[\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right]^2$

$v\to c$, $\varepsilon_{10}\to\infty$ $\quad \frac{T_{1min}}{T_{10}}\Rightarrow 0 \quad \frac{\varepsilon_{1min}-m_1c^2}{\varepsilon_{10}}=\frac{(m_1-m_2)^2c^2}{2m_2\varepsilon_{10}}$

$$\varepsilon_{1min}=\left\{2m_2m_1c^2+(m_1^2+m_2^2-2m_1m_2)c^2\right\}\cdot\frac{1}{m_2}=\frac{m_1^2+m_2^2}{m_2}c^2$$

Доля переданной энергии $\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}=\frac{2m_2(\varepsilon_{10}^2-m_1^2c^4)}{m_1^2c^2+m_2^2c^2+2m_2\varepsilon_{10}}$

1) $m_1\gg m_2$

1a) $v\ll c$, $\varepsilon_{10}\simeq m_1c^2+\frac{m_1v^2}{2}$,

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}=\frac{2m_2\cdot 2m_1c^2\,\frac{m_1v^2}{2}}{m_1^2c^2\ \ldots}=\frac{m_2}{m_1}\frac{v^2}{c^2}\ll 1.$$

1б) # $v \to c$; $\frac{\delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \simeq \frac{2m_2\mathcal{E}_{10}^2}{(m_1^2c^2+2m_2\mathcal{E}_{10})\mathcal{E}_{10}} = \frac{1}{1+\frac{m_1^2c^2}{2m_2\mathcal{E}_{10}}} \simeq 1$

при $\mathcal{E}_{10} \gtrsim \frac{m_1^2}{m_2}c^2 = \overset{\gg 1}{\frac{m_1}{m_2}} \cdot m_1c^2$

2. $m_1 \ll m_2$

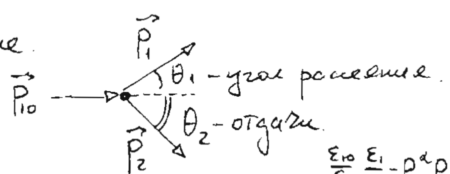
2а) $v \ll c$; $\mathcal{E}_{10} \simeq m_1c^2 + \frac{1}{2}m_1v^2$; $\frac{\delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{10}} = \frac{2m_2 \cdot 2m_1c^2 \cdot \frac{1}{2}m_1v^2}{m_2^2c^2 \cdot m_1c^2} \simeq \frac{m_1}{m_2}\frac{v^2}{c^2} \ll 1.$

2б) $v \sim c$, $\mathcal{E}_{10} \to \infty$

$$\frac{\delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \simeq \frac{2m_2\mathcal{E}_{10}^{\cancel{2}}}{(m_2^2c^2+2m_2\mathcal{E}_{10})\cancel{\mathcal{E}_{10}}} = \frac{1}{1+\frac{m_2c^2}{\mathcal{E}_{10}}} \simeq 1 \quad \text{при } \mathcal{E}_{10} \gtrsim m_2c^2$$

Найдем угол рассеяния и угол отдачи

В Л-системе.



$p_{10}^i + p_{20}^i = p_1^i + p_2^i$;

$\frac{\mathcal{E}_{10}}{c}\frac{\mathcal{E}_1}{c} - p_{10}^\alpha p_1^\alpha$ $\quad p_{10}^i + p_{20}^i - p_1^i = p_2^i$;

$$m_1^2c^2 + m_2^2c^2 - m_1^2c^2 + 2\underset{\frac{\mathcal{E}_{10}}{c}\cdot\frac{m_2c^2}{c}}{p_{10}^i p_{20i}} - 2p_{10}^i p_{1i} - 2\underset{\frac{m_2c^2}{c}\,\frac{\mathcal{E}_1}{c}}{p_{20}^i p_{1i}} = m_2^2c^2$$

$$m_1^2c^2 + \frac{\mathcal{E}_{10}m_2c^2}{c^2} - \frac{\mathcal{E}_1 m_2c^2}{c^2} - \frac{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_{10}}{c^2} + p_{10}p_1\cos\theta_1 = 0$$

$$\cos\theta_1 = \frac{1}{c^2 p_{10}p_1}\left[\mathcal{E}_1(\mathcal{E}_{10}+m_2c^2) - \mathcal{E}_{10}m_2c^2 - m_1^2c^4\right]$$

2. $p_{10}^i + p_{20}^i - p_2^i = p_1^i$

$$m_1^2c^2 + m_2^2c^2 + m_2^2c^2 + 2p_{10}^i p_{20\,i} - 2p_{10}^i p_{2\,i} - 2p_{20}^i p_{2\,i} = m_1^2c^2$$

$$m_2^2c^2 + \frac{\varepsilon_{10}}{c}\cdot\frac{m_2c^2}{c} - \frac{m_2c^2}{c}\cdot\frac{\varepsilon_2}{c} - \frac{\varepsilon_{10}}{c}\frac{\varepsilon_2}{c} + p_{10}p_2\cos\theta_2 = 0$$

$$\cos\theta_2 = \frac{1}{c^2p_{10}p_2}\left[\varepsilon_2(\varepsilon_{10} + m_2c^2) - m_2c^2(\varepsilon_{10} + m_2c^2)\right] =$$

$$\cos\theta_2 = \frac{1}{c^2p_{10}p_2}\cdot(\varepsilon_2 - m_2c^2)(\varepsilon_{10} + m_2c^2).$$

Д-ть, что при $m_1 \gg m_2$ $\sin\theta_{1\,max} = \frac{m_2}{m_1}$

Эффект Комптона: рассм. сл. когда $m_1 = 0$ – фотон $\varepsilon_1 = cp_1$, $\varepsilon_{10} = cp_{10}$
$m_2 = m$ $\theta_1 = \theta.$

$$\cos\theta_1 = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_{10} + \varepsilon_1 mc^2 - \varepsilon_{10}mc^2}{\varepsilon_1\varepsilon_{10}} = 1 + \frac{mc^2}{\varepsilon_{10}} - \frac{mc^2}{\varepsilon_1};$$

$$\frac{mc^2}{\varepsilon_1} = \frac{mc^2}{\varepsilon_{10}} + 1 - \cos\theta; \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_{10}}{1 + \frac{\varepsilon_{10}}{mc^2}(1-\cos\theta)}$$

Для фотона $\varepsilon_1 = \hbar\omega$
$\varepsilon_{10} = \hbar\omega_0$

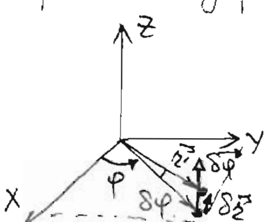
$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\hbar\omega_0}{mc^2}(1-\cos\theta)}$$

$$\frac{\hbar\omega_0}{mc^2} = \frac{h}{mc}\cdot\frac{\omega_0}{2\pi c} = \Lambda/\lambda_0$$

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\Lambda}{\lambda_0}(1-\cos\theta)}$$

Четырехмерный тензор момента импульса.

$\vec{M} = \sum \vec{r}\times\vec{p}$
по всем частицам.



$\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{r}$

$\delta\vec{r} = \delta\vec{\varphi}\times\vec{r}$

$\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{\varphi}\times\vec{r}$

В тензорном виде: $x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \underbrace{\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\delta\varphi^{\beta}}_{\delta\Omega^{\alpha\gamma}} x^{\gamma}$; $x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \delta\Omega^{\alpha\gamma} x^{\gamma}$

$\delta\Omega^{\alpha\gamma} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\delta\varphi^{\beta}$

$\delta\Omega^{\alpha\gamma} = -\delta\Omega^{\gamma\alpha}$, действительно: $(x'^{\alpha})^2 = (x^{\alpha})^2 + \delta\Omega^{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}$

$$(x'^{\alpha})^2 = (x^{\alpha})^2$$

Поворот в 4-мерн. пр-ве:

$$\delta x^i \equiv x'^i - x^i = \delta\Omega^{ik}x_k$$

и в 4-системе квадрат рад.-вектора не меняется:

$$x'^i x'_i = x^i x_i + \underbrace{2\delta\Omega^{ik}x_i x_k}$$

чтобы $\uparrow = 0$ необход. $\delta\Omega^{ik} = -\delta\Omega^{ki}$

Для dim. = 3 $\frac{n(n-1)}{2}$ - независимых компонент у тензора $\delta\Omega^{\alpha\beta}$ - абс. антисим.

, а dim = 4 - кол-во в кот-ых возможны повороты

x^1x^0, x^1x^2, x^{13}

x^2x^0, x^2x^3, x^{30}

Когд рассматривали действие как функц коорд. $\delta S = -\sum p_i \delta x^i \Big|_a^b$

но $\delta x^i = \delta\Omega^{ik}x_k$ где $\delta\Omega^{ik}$ - независим от номера частиц (вынести параметры поворота за Σ)

$$\delta S = -\delta\Omega^{ik}\sum p_i x_k = -\delta\Omega_{ik}\sum\left(\underbrace{\frac{p^i x^k - p^k x^i}{2}}_{A^{ik}} + \underbrace{\cancel{\frac{p^i x^k + p^k x^i}{2}}}_{S^{ik}}\right)\Bigg|_a^b =$$

$$= \delta\Omega_{ik}\frac{1}{2}\sum(x^i p^k - x^k p^i)\Big|_a^b$$

$\delta S = 0$: $\sum(x^i p^k - x^k p^i)\Big|_a = \sum(x^i p^k - x^k p^i)\Big|^b$ - 4-мерн. момент импульса.

$M^{ik} = \sum(x^i p^k - x^k p^i)$ - не меняется при повороте в силу изотропии пр-ва времени.

$$M^{\alpha\beta} = \sum (x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha) = e^{\alpha\beta\gamma} e^{\gamma\mu\nu} \sum (x^\mu p^\nu$$

$(\alpha,\beta = 1,2,3)$

e – Леви-Чевита.

$$e^{\alpha\beta\gamma} e^{\gamma\mu\nu} = e^{\alpha\beta\gamma} e^{\mu\nu\gamma} = (\delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta\nu} - \delta^{\alpha\nu}\delta^{\beta\mu})$$

сумма по 1-му индексу.

$$= e^{\alpha\beta\gamma} \sum (\vec{r} \times \vec{p})_\gamma = e^{\alpha\beta\gamma} M^\gamma$$

$$M^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta\gamma} M^\gamma; \quad M^{ik} = -M^{ki} : M^{00} = M^{11} = M^{22} = M^{33} = 0.$$

Чему соотв. независимость от времени величин $M^{0\alpha}$?

$$M^{0\alpha} = \sum (x^0 p^\alpha - x^\alpha p^0) = \sum ct \cdot p^\alpha - x^\alpha \frac{\mathcal{E}}{c} = const \neq f(t)$$

$$\frac{\sum \mathcal{E}\vec{r}}{\sum \mathcal{E}} - \frac{\sum c^2 \vec{p}}{\sum \mathcal{E}} \cdot t = Const.$$

радиус-вектор центра инерции

скорость движения системы как единого целого.

релятивистское выр-е для радиуса-вектора центра инерции системы

$$\vec{R} = \frac{\sum \mathcal{E}\vec{r}}{\sum \mathcal{E}}.$$

Если скорости всех частиц $v \ll c$, то $\mathcal{E} = mc^2$ получим классич. выр-е для радиуса-вектора

$$\vec{R}_{кл} = \frac{\sum m\vec{r}}{\sum m}$$

Мы рассм. замкн. сист. Оказывается, что релятив выр-е справедливо без взаимодействия м-ду частицами. В противном случае необходимо учитывать энергию поля – т.к. посредством его осуществляется взаимодействие м-ду частицами.

Движение заряженных частиц в ЭМ поле.

В класс. взаимод происходит мгновенно. В релятив. изменение поля распространяется. В класс. элементарная (частица, система) описывается 3-мя коорд. и 3-мя проекциями импульса.
Элемент. частицу можно рассм. как абс. твердое тело.
В релятив. мех-ке, впринципе, нельзя ввести абс. Т.Т.


удар доходит мгновенно до всех точек тела

в релятив мех-ке тело будет деформировано.
В релятив. мех-ке элемент. частица должна быть точечной.

При описании движ. элемент. част. в ЭМ поле надо учитывать ее взаимод с полем.

Т.к. действие - аддитивная величина, тогда

$$S = S_m + S_{mf}$$

S_m — для свободн. частицы; S_{mf} — интеграл действия кот-ый описывает взаимод.

$$S_m = -mc\int ds \quad ; \quad \text{оказывается} \quad S_{mf} = -\frac{e}{c}\int A_i\,dx^i$$

e - заряд частицы; S_{mf} - определяется неоднозначно

A_i - 4-мерн. вектор $A_i(\varphi, -\vec{A})$; $A^i(\varphi, \vec{A})$

φ — скалярный потенциал ЭМ поля, $\vec{A}$ — векторный потенциал ЭМ поля.

Тогда:

$$S = -mc\int ds - \frac{e}{c}\int A_i\,dx^i = \int\{-mc^2\gamma^{-1}dt\} - \frac{e}{c}\int(\varphi\, \underset{c\,dt}{\underset{\shortparallel}{dx^0}} + A_\alpha\, dx^\alpha)$$

$$= \int -mc^2\gamma^{-1}dt - \frac{e}{c}\int\left(-\vec{A}\frac{d\vec{r}}{dt} + c\varphi\right)dt =$$

(и разум. по i.)

$$= \int\left(-\frac{mc^2}{\gamma} + \frac{e}{c}\vec{A}\vec{v} - e\varphi\right)dt = \int L\,dt \quad \text{откуда}$$

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} - e\varphi$$

Обобщ. импульс $\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}$

Ф-ция Гамильтона $\mathcal{H} = \vec{v}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + e\varphi$

Но ф-ция Гамильтона должна быть выражена ч-з обобщ. импульс.

Энергия свободн. частицы. $mc^2\gamma = \sqrt{c^2p^2+m^2c^4} = \sqrt{c^2(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + m^2c^4}$

$\mathcal{H} = c\sqrt{(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + m^2c^2} + e\varphi$

Если $v \ll c$: $|\vec{p}| = |m\vec{v}| = |\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}| \ll mc$ тогда

в класс. мех-ке можно выбросить.

$\mathcal{H}_{кл} = mc^2\sqrt{1+\frac{1}{m^2c^2}(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2} + e\varphi \underset{в\ ряд}{\simeq} \cancel{mc^2} + \frac{1}{2m}(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + e\varphi$

Ур-е Гамильтона-Якоби для движ. зар. част. в релятив. мех-ке.

$\left(\frac{\mathcal{H} - e\varphi}{c}\right)^2 = (\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + m^2c^2$; $\vec{P} = \mathrm{grad}\, S$, $\mathcal{H} = -\frac{\partial S}{\partial t}$

$(\mathrm{grad}\, S - \frac{e}{c}\vec{A})^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi\right)^2 + m^2c^2 = 0$ — ур-е Гамильтона-Якоби в 3-мерн. форме.

Движение заряда в ЭМ. поле.

Во многих. случ. можно считать поле создаваемое зарядом малым

$L = -mc^2\sqrt{1-v^2/c^2} + \frac{e}{c}\vec{A}\vec{v} - e\varphi$; $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$

$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \vec{P} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}$; $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \mathrm{grad}\, L = \frac{e}{c}\mathrm{grad}(\vec{A}\cdot\vec{v}) - e\,\mathrm{grad}\,\varphi$

$\mathrm{grad}(\vec{A}\cdot\vec{v}) =$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{e}{c}\left\{(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A} + \vec{v}\times \mathrm{rot}\vec{A}\right\} - e\,\mathrm{grad}\varphi \quad ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right) = \frac{e}{c}\left\{(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A} + \vec{v}\times \mathrm{rot}\vec{A}\right\} - e\,\mathrm{grad}\varphi \ ; \qquad \vec{A} = \vec{A}(\vec{r},t)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\left\{-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\varphi\right\} + \frac{e}{c}\vec{v}\times\mathrm{rot}\vec{A}$$

независим от $\vec{v}$ $\qquad$ $\sim$ и $\perp$-но $\vec{v}$

Сила действующая на единичн. заряд в ЭМ поле – Лоренцева

$$\begin{cases} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\varphi \\ \vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A} \end{cases} \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H}$$

Найдем ур-е описывающее измен. со временем кин. энергии.

T – кин. энергия связанная с движением.

$$\mathcal{E}_k = \gamma\cdot mc^2 = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$$

$$d\mathcal{E}_k = c\,\frac{2\vec{p}\,d\vec{p}}{2\sqrt{p^2+m^2c^2}} = \underbrace{\frac{c^2\vec{p}}{\mathcal{E}_k}}_{=\vec{v}}\cdot d\vec{p} = \vec{v}\cdot d\vec{p} \ ; \quad \frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \vec{v}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = e\vec{v}\cdot\vec{E} \Rightarrow$$ магнитное поле не производит работу над зарядом

$d\mathcal{E}_k = e\vec{E}\,d\vec{r}$ – работа на участке dr.

Изв. что ур-я механики не измен. при замене $t \to -t$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\gamma\cdot m\vec{v} \ ; \quad \vec{v}\to-\vec{v} \text{ и } t\to -t \ : \ \frac{d\vec{p}}{dt} \to \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$\vec{E} \to -\vec{E}$ тогда чтобы прав. часть не изменялось $\vec{H} \to -\vec{H}$.

Т.к. $\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi$ тогда $\vec{A} \to -\vec{A}$, $\varphi \to \varphi$.

Действие на заряд определение напряж. полей, а не потенциалами. Поэтому поле с один. напряж. эквив (по действию на заряд).

Потенциалы определяются неоднозначно.
Рассм. градиентную инвариантность.

$S_{mf} = -\frac{e}{c}\int A_i\, dx^i$ если заменить $A_i = A_i' + \frac{\partial f}{\partial x^i}$ (*)
grad произвол. f.

$S_{mf} = -\frac{e}{c}\int A_i' dx^i - \frac{e}{c}\int \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i}$

$\int df = f\big|_a^b$ – const. и при варьировании S_{mf} она исчезает.

Запишем (*) в 3-мерн виде. $i=\alpha$

$A = A' - \operatorname{grad} f$; $i=0$: $\varphi = \varphi' + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$

"–" т.к. подняли индексы

$i=\alpha$: $\vec{A} = \vec{A}' - \operatorname{grad} f$

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}$ $\vec{E} = \vec{E}'$, $\vec{H} = \vec{H}'$

Все ~~заряд~~ ур-е движения зарядов в ЭМ поле инвариантны к градиентному преобразованию.

Для стационарн. случае $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi \longrightarrow$ определение с точн. до const.
$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}$

Для $\vec{H}$ с точн. до градиента неком. ф-ции.

Если потенциалы ЭМ поле не зависят явно от времени то и ф-ция Лагранжа явно от времени $\Rightarrow$ полн. энергия совпадает с ф-цией Гамильтона и не меняется со врем.

$\mathcal{E} = \mathcal{H} = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\varphi = \text{const}$ для ЭМ. поле. ($\int$ движение).

$\vec E\cdot d\vec r = -d\varphi$; $\varphi = -\vec E\cdot\vec r$; $\vec E = -\mathrm{grad}\,\varphi = \mathrm{grad}(\vec E\cdot\vec r) = \vec E$

$\varphi = -\vec E\cdot\vec r$ — в случае $\vec E \neq \vec E(\vec r,t)$.

В случае когда $\vec H \neq \vec H(\vec r,t)$ $\quad \vec A = \frac{1}{2}\vec H\times\vec r$ $\qquad$ [**].

$$\vec H = \mathrm{rot}\,\vec A = \frac{1}{2}\nabla\times(\vec H\times\vec r) = \frac{1}{2}\vec H\,\mathrm{div}\,\vec r - \frac{1}{2}(\vec H\cdot\nabla)\vec r = \vec H.$$

Пусть $\vec H \uparrow z$ оказываем что для характеризующий того же поле можно взять $\vec A'$ с проекциями.

$$A'_x = -yH,\quad A'_y = 0,\quad A'_z = 0.$$

действительно $\quad H = (\mathrm{rot}\,A')_z = \frac{\partial A'_y}{\partial x} - \frac{\partial A'_x}{\partial y} = H$

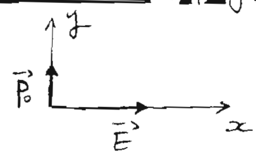
Используя [**]:

$$A_x = -\frac{1}{2}yH \qquad A_y = \frac{1}{2}xH \qquad A_z = 0 \quad ;$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}yH = -yH + \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow \frac{1}{2}yH = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}yH - \frac{df_1}{dx} \Rightarrow f_1 = \mathrm{const} = 0. \\ \frac{1}{2}xH = \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \frac{1}{2}xyH = f(x,y) + f_1(x) \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \Rightarrow f = f(x,y) \end{cases}$$

Окончат. $\quad f(x,y) = \frac{xy}{2}H$

Движение заряда в однород. постоянном эл. поле.



$$\frac{d\vec p}{dt} = e\vec E \Leftrightarrow \quad \frac{dp_x}{dt} = eE_x \quad p_x = eEt + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{p_{0x}}}$$

$$\frac{dp_y}{dt} = 0 \quad p_y = p_0$$

$$\frac{dp_z}{dt} = 0 \quad p_{0z} = 0$$

$t = 0$

$\vec p_0\,(0; p_0; 0)$

$\vec r_0 = 0.$

Найдем скорость $\vec{v} = \frac{c^2\vec{p}}{\mathcal{E}_k}$; $\mathcal{E}_k = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}$

$\mathcal{E}_k = \left(c^2(eEt)^2 + c^2p_0^2 + m^2c^4\right)^{1/2}$;

, но $\mathcal{E}_{k0}^2 = c^2p_0^2 + m^2c^4$; $\mathcal{E}_k = \left[\mathcal{E}_{k0}^2 + e^2E^2t^2c^2\right]^{1/2}$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{c^2eEt}{\left[\mathcal{E}_{k0}^2 + (ceEt)^2\right]^{1/2}}; \quad x = \frac{c^2eE}{\mathcal{E}_{k0}}\int\frac{t\,dt}{\left[1+\left(\frac{ceEt}{\mathcal{E}_{k0}}\right)^2\right]^{1/2}}$$

замена $1+\left(\frac{ceEt}{\mathcal{E}_{k0}}\right)^2 = \tau^2$;

$$x = \frac{c^2eE}{\mathcal{E}_{k0}}\cdot\left(\frac{\mathcal{E}_{k0}}{ceE}\right)^2\int\frac{\tau\,d\tau}{\tau} = \frac{\mathcal{E}_{k0}}{eE}\left[\left[1+\left(\frac{ceEt}{\mathcal{E}_0}\right)^2\right]^{1/2} - 1\right]$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{c^2p_0}{\left[\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2\right]^{1/2}}; \quad y = \frac{c^2p_0}{\mathcal{E}_0}\int\frac{dt}{\left[1+\left(\frac{ceEt}{\mathcal{E}_0}\right)^2\right]^{1/2}} = \left\| \frac{ceEt}{\mathcal{E}_0} = \eta \right\| =$$

$$= \frac{c^2p_0}{\mathcal{E}_0}\cdot\frac{\mathcal{E}_0}{ceE}\int\frac{d\eta}{\left[1+\eta^2\right]^{1/2}} = \frac{cp_0}{eE}\,\mathrm{Arsh}\,\eta = \frac{cp_0}{eE}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{ceEt}{\mathcal{E}_0}$$

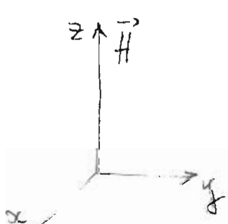
$$\frac{ceEt}{\mathcal{E}_0} = \mathrm{sh}\,\frac{eE}{cp_0}y; \quad x = \frac{\mathcal{E}_0}{eE}\left(\mathrm{ch}\,\frac{eE}{cp_0}y - 1\right); \quad z = 0.$$

$t \to \infty$; если $c \to \infty$ (кл. случай) $\mathcal{E}_0 = mc^2$ $p_0 = mv_0$.

тогда

$$x = \frac{mc^2}{eE}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{eEy}{mcv_0}\right) - 1\right) = \frac{eE}{2mv_0^2}\,y$$

Движ. заряж. частиц в постоянном и однородн. магнитном поле.



$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H}$; Т.к. $\vec{H}$ не производит работы, то

$\mathcal{E}_{кин} = \mathrm{const}$; $\vec{p} = \frac{\mathcal{E}_k\vec{v}}{c^2}$

$$\frac{\mathcal{E}_k}{c^2}\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{eH}{c}\vec{v}\times\vec{e}_z \;\Big|\cdot\frac{c^2}{\mathcal{E}_k} \qquad \vec{H} = \vec{e}_z H$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \omega_H \vec{v}\times\vec{e}_z \quad ; \text{ где } \quad \omega_H = \frac{ecH}{\mathcal{E}_k}$$ – циклотронная частота.

$$\frac{d\vec{v}_x}{dt} = \omega_H v_y \quad ; \quad \frac{d\vec{v}_y}{dt} = -\omega_H v_x \quad ; \quad \frac{dv_z}{dt} = 0$$

Из послед. ур-я $v_z = v_{0z}$; Решим сист. ур-ний $\begin{cases} \dot{v}_x = \omega_H v_y & \Big|\cdot 1 \\ & \text{"+"} \\ \dot{v}_y = -\omega_H v_x & \Big|\cdot i \end{cases}$

Получим $\frac{d}{dt}(v_x + i v_y) = -i\omega_H(v_x + i v_y)$

$v_x + i v_y = a e^{-i\omega_H t}$, где $a = v_{0\perp} e^{-i\alpha}$; α – начальная фаза.

$$v_x + i v_y = v_{0\perp} e^{-i(\omega_H t + \alpha)}$$

Легко видеть, что $\begin{cases} v_x = v_{0\perp}\cos(\omega_H t + \alpha) \\ v_y = -v_{0\perp}\sin(\omega_H t + \alpha) \end{cases}$

$v_x^2 + v_y^2 = v_{0\perp}^2$ – величина попереч. скорости не меняется со временем.

Получим ур-е траектории.

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \frac{v_{0\perp}}{\omega_H}\sin(\omega_H t + \alpha) ; \\ y(t) = y_0 + \frac{v_{0\perp}}{\omega_H}\cos(\omega_H t + \alpha) ; \\ z = z_0 + v_{0z} t ; \end{cases}$$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{v_{0\perp}^2}{\omega_H^2}$

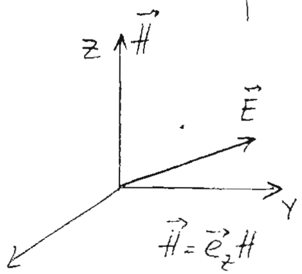
где $\frac{v_{0\perp}^2}{\omega_H^2} = r_L^2$ – ларморовский радиус.

Т.о. траектория – винтовая линия с пост. шагом.

$\omega_H = \frac{ecH}{\mathcal{E}_k}$, если $v \ll c$: $\mathcal{E}_k = mc^2$

$$\omega_{H(\text{кл.})} = \frac{eH}{mc}$$

Движ. нерелятив. заряда в постоянных и однородных электр. и магнитных полях.



$\vec H = \vec e_z H$

z по $\vec H$, а y так чтобы $\vec E$ лежало в пл. ZY.

$$m\frac{d\vec v}{dt} = e\vec E + \frac{e}{c}\vec v\times\vec H \;;$$

$$\frac{d\vec v}{dt} = \omega_H \vec v\times \vec e_z + \frac{e}{m}\vec E \;;$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = \omega_H v_y & \Big|\cdot 1 \\ \dfrac{dv_y}{dt} = -\omega_H v_x + \dfrac{e}{m}E_y & \Big|\cdot i \quad \text{"+"} \\ \dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{e}{m}E_z \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}(v_x+iv_y) + i\omega_H(v_x+iv_y) = i\frac{eE_y}{m}$$

Неоднор. диф. ур-е : общ. однор. „+“ частн. неоднор.

$$\Rightarrow v_z = v_{0z} + \frac{e}{m}E_z t \;;\; z = v_{0z}t + \frac{eE_z}{2m}t^2 \quad (t=0 \; z=0).$$

Частн. реш. неоднород: $v_x + i v_y = a e^{-i\omega_H t} + \frac{eE_y}{m\omega_H}$; полож. α то a - веществ.

$$\begin{cases} v_x = a\cdot\cos\omega_H t + c\dfrac{E_y}{H} \\ v_y = -a\cdot\sin\omega_H t \end{cases}$$

$\frac{eE_y}{m\omega_H} = c\frac{E_y}{H}$.

; Если взять средние значения скоростей за период.

$$\langle v_x\rangle_T = c\frac{E_y}{H}$$

$$\langle v_y\rangle_T = 0$$

Нерелятив. задача $v \ll c$ т.е. $\frac{E_y}{H} < 1$.

$v_d = c\frac{E_y}{H}$ - дрейфовая скор.

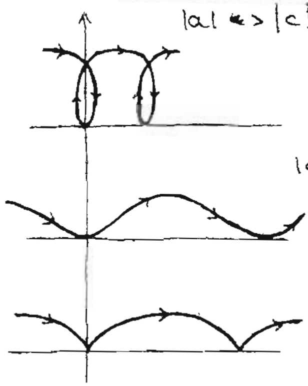
$$\vec v_d = c\frac{\vec E_0\times\vec H}{H^2}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\omega_H}\sin\omega_H t + c\dfrac{E_y}{H}t & \left(t=0;\; \begin{matrix} x=0 \\ y=0\end{matrix}\right) \\ y = \dfrac{a}{\omega_H}(\cos\omega_H t - 1) \end{cases}$$

постоянную выбра так чтобы вып-лось.

— эта траектория „трохоида“

Рассмотрим 3 предельных случая.



$|a| \gg \left|c\frac{E_y}{H}\right|$

$|a| < \left|c\frac{E_y}{H}\right|$

$a = -c\frac{E_y}{H}$ $\quad \begin{cases} x = \dfrac{eE_y}{H\omega_H}(\omega_H t - \sin\omega_H t) \\ y = \dfrac{eE_y}{H\omega_H}(1 - \cos\omega_H t) \end{cases}$ „циклоида"

Получим ур-е движения в 4-мерн. форме.

Принцип. наименьш. действие:

$$S = \int_a^b \left(-mc\,ds - \frac{e}{c}A_i dx^i\right)$$, проведем варьирование

$$\delta S = -\int_a^b mc\,\delta ds + \frac{e}{c}\delta A_i dx^i + \frac{e}{c}A_i \delta dx^i =$$

$$= -\int_a^b mc u_i \delta dx^i + \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\delta x^k dx^i + \frac{e}{c}A_i d\delta x^i =$$

$$= -\int_a^b \Big(d\big(mcu_i \delta x^i + \frac{e}{c}A_i \delta x^i\big) - \delta x^i d\big(mcu_i + \frac{e}{c}A_i\big) +$$

$$+ \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^k} u_i \delta x^k ds \Big) = -\Big(mcu_i + \frac{e}{c}A_i\Big)\delta x^i \Big|_a^b +$$

$u_i = \frac{dx^i}{ds}$

$$+ \int_a^b \left\{ \delta x^i mc \frac{du}{ds} ds + \delta x^i \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^k - \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^k} u^i \delta x^k \right\} =$$

$\cdot\frac{ds}{ds}$ $\quad$ $i \to k$, $k \to i$ т.к. по ним идет суммир.

$$\delta S = -\Big(mcu_i + \frac{e}{c}A_i\Big)\delta x^i\Big|_a^b + \int_a^b \left\{ mc\frac{du}{ds} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)u^k \right\}\delta x^i ds$$

1) $\delta S = 0$, $\delta x^i|_a = \delta x^i|_b = 0$ откуда

$$mc\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c}F_{ik}u^k, \qquad F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$$ – тензор ЭМ поля.

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \; ; \quad F_{ik} = -F_{ki} \Rightarrow F_{00} = F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0.$$

$$F_{0\alpha} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A^\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} = E^\alpha \; ; \quad \begin{cases} F_{0x} = E_x \\ F_{0y} = E_y \\ F_{0z} = E_z \end{cases}$$

F^{ik} : $F^{0\alpha} = -F_{0\alpha}$;

знак, при поднятии, меняет только α.

контравар. проекц. компонент

$$F_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta\gamma} e_{\gamma\mu\nu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} = e^{\alpha\beta\gamma} e^{\gamma\mu\nu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} =$$
$$= -e^{\alpha\beta\gamma} e^{\gamma\mu\nu} \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} = -e^{\alpha\beta\gamma} (\nabla \times \vec{A})^\gamma =$$
$$= -e^{\alpha\beta\gamma} H^\gamma \; ;$$

$F_{0\alpha} = E^\alpha$

$F_{\alpha\beta} = -e^{\alpha\beta\gamma} H^\gamma$

$$F_{12} = -e^{123} H^3 = -H_z$$
$$F_{13} = -e^{132} H^2 = H_y$$
$$F_{23} = -e^{231} H^1 = -H_x$$

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{0\alpha} = -E^\alpha \, , \quad F^{\alpha\beta} = -e^{\alpha\beta\gamma} H^\gamma$$

$$mc \frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik} u^k \; ;$$

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k \; ;$$

$$\begin{matrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{matrix} = F^{ik}$$

$i = 0$; $\quad mc \frac{du^0}{ds} = \frac{e}{c} F^{0\alpha} u_\alpha$

$$mc \frac{1}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{e}{c}(-E^\alpha) \cdot \left(- \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$$

$$\frac{du^i}{ds}\,\cancel{mc} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k; \quad mcu^i = p^i; \quad \frac{dp^i}{ds} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k$$

$i=0$: $\quad \frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = e\vec{v}\vec{E}$

$i=\alpha$: $\quad \frac{dp^\alpha}{c\sqrt{1-v^2/c^2}\,dt} = \frac{e}{c}F^{\alpha k}u_k = \frac{e}{c}F^{\alpha 0}u_0 + \frac{e}{c}F^{\alpha\beta}u_\beta =$

$$= \frac{e}{c}E^\alpha \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} +$$

$$\delta S = -\left(mcu_i + \frac{e}{c}A_i\right)\delta x^i\Big|_a^b + \int\left(\frac{dp_i}{ds} - \frac{e}{c}F_{ik}u^k\right)\delta x^i\,ds$$

$$\frac{dp_i}{ds} = \frac{e}{c}F_{ik}u^k, \quad \delta x^i\big|_a = 0 \quad \text{но не для } \underline{b}$$

$$\delta S = -\left(p_i + \frac{e}{c}A_i\right)\delta x^i; \quad p_i + \frac{e}{c}A_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i}, \quad P_i = p_i + \frac{e}{c}A_i = -\frac{\partial S}{\partial x_i}$$

$$P^i = p^i + \frac{e}{c}A^i; \quad P^0 = p^0 + \frac{e}{c}A^0 = \frac{\mathcal{E}_k}{c} + \frac{e\varphi}{c} = \frac{\mathcal{E}_k + e\varphi}{c};$$

$$\vec{P} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}; \quad P^i\left(\frac{\mathcal{E}_k + e\varphi}{c}, \vec{P}\right).$$

$$\begin{cases} p^i = P^i - \frac{e}{c}A^i \\ p_i = P_i - \frac{e}{c}A_i \end{cases} \qquad \left(P^i - \frac{e}{c}A^i\right)\left(P_i - \frac{e}{c}A_i\right) = p^i p_i = m^2c^2;$$

$$g^{ik}\left(P_i - \frac{e}{c}A_i\right)\left(P_k - \frac{e}{c}A_k\right) - m^2c^2 = 0;$$

$$g^{ik}\left(\frac{\partial S}{\partial x^i} + \frac{e}{c}A_i\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x_k} + \frac{e}{c}A_k\right) - m^2c^2 = 0$$

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Как преобразуется E_x при переходе от одной к др. инерц. сист.

$$E_x = F^{10} = \frac{\partial x^1}{\partial x'^n}\frac{\partial x^0}{\partial x'^m}F'^{nm} =$$

$$= \frac{\partial x^1}{\partial x'^n}\left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^0}F'^{n0} + \frac{\partial x^0}{\partial x'^1}F'^{n1}\right) =$$

$$x^0 = \frac{x'^0 + (V/c)\,x'^1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \neq f(x'^2, x'^3)$$

т.к. $F^{ik} = -F^{ki}$

$$= \frac{\partial x^0}{\partial x'^0}\left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^0}\underbrace{\cancel{F'^{00}}}_{0} + \frac{\partial x^1}{\partial x'^1}F'^{10}\right) +$$

$$x^1 = \frac{x'^1 + (V/c)\,x'^0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$+ \frac{\partial x^0}{\partial x'^1}\left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^0}\underbrace{F'^{01}}_{=\,-F'^{10}} + \frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\underbrace{\cancel{F'^{11}}}_{0}\right) =$$

$x^2 = x'^2$

$x^3 = x'^3$

$(V \equiv v)$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]^2 \cdot F'^{10} - \left[\frac{v/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]^2 \cdot F'^{10} = F'^{10} = E'_x$$

$E_x = E'_x$ — продольная компонента эл. поле не меняется.

$E_y = F^{20}$

$F^{ik} \to A^i B^k$ — компоненты тензора преобразуются как произведение соотв. коорд. векторов.

$F^{20} \to A^2 B^0$

$A^2 = A'^2$ (т.к. $x^2 = x'^2$).

$$E_y = F^{20} = \frac{F'^{20} + (V/c)\,F'^{21}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{E'_y + (V/c)\,H'_z}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

$$E_z = F^{30} = \frac{F'^{30} + (V/c)F'^{31}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{E'_z - (V/c)H'_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$H_x = F^{32} = F'^{32} = H'_x \;;$$
$\left(\begin{matrix}\text{т.к.}\\ x^2 = x'^2\\ x^3 = x'^3\end{matrix}\right)$

$$H_y = F^{13} = \frac{F'^{13} + (V/c)F'^{03}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{H'_y - (V/c)E'_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$H_z = F^{21} = \frac{F'^{21} + (V/c)F'^{20}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{H'_z + (V/c)E'_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$E_x = E'_x \qquad\qquad H_x = H'_x$$

$$E_y = \gamma\cdot\left(E'_y + \frac{V}{c}H'_z\right) \qquad\qquad H_y = \gamma\cdot\left(H'_y - \frac{V}{c}E'_z\right)$$

$$E_z = \gamma\cdot\left(E'_z - \frac{V}{c}\cdot H'_y\right) \qquad\qquad H_z = \gamma\cdot\left(H'_z + \frac{V}{c}E'_y\right)$$

Если $v/c \ll 1$. $(\vec{v} \parallel x)$.

$$E_x = E'_x \qquad\qquad H_x = H'_x$$

$$E_y = E'_y + \frac{V}{c}H'_z \qquad\qquad H_y = H'_y - \frac{V}{c}\cdot E'_z$$

$$E_z = E'_z - \frac{V}{c}H'_y \qquad\qquad H_z = H'_z + \frac{V}{c}E'_y$$

$$\vec{E} = \vec{E}' - \frac{1}{c}[\vec{v}\times\vec{H}'] \qquad\qquad \vec{H} = \vec{H}' + \frac{1}{c}[\vec{v}\times\vec{E}'].$$

В случае $\vec{H}' = 0$: $\quad H_x = H'_x = 0 \;;\quad H_y = -\frac{V}{c}\cdot\gamma E'_z$

$\vec{E}'=0 \qquad E_x = E'_x = 0 \;; \qquad E_y = \gamma \frac{V}{c} H'_z = \frac{V}{c} H_z \;;$

$E_z = \gamma \cdot \left(-\frac{V}{c}\right) H'_y = -\frac{V}{c} H_y \;; \qquad \cancel{\vec{E} = (}$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{H}$$

Какие инварианты можно образовать из компонент ЭМ. поля.

1) $F^{ik}F_{ik} = inv.$

$$F^{ik}F_{ik} = F^{0k}F_{0k} + F^{\alpha k}F_{\alpha k} = F^{0\alpha}F_{0\alpha} + F^{\alpha 0}F_{\alpha 0} + F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} =$$

$\beta = 1,2,3$

$$= -E^{\alpha}E^{\alpha} - E^{\alpha}E^{\alpha} + (-e^{\alpha\beta\gamma}H^{\gamma})\cdot(-e^{\alpha\beta\nu}H^{\nu}) =$$

$e^{\alpha\beta\gamma}\cdot e^{\alpha\beta\nu} = 2\delta^{\gamma\nu}.$

$$= 2H^2 - 2E^2 \qquad \boxed{F^{ik}F_{ik} = 2(H^2 - E^2).}$$

2) $e^{iklm}F_{ik}F_{lm}$ — inv. по отнош. к повороту (псевдоскаляр)

$e^{0123} := 1.$

$$e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = e^{0klm}F_{0k}F_{lm} + e^{\alpha klm}F_{\alpha k}F_{lm} =$$

k,l,m — разные.

$$= e^{0\alpha\beta\gamma}F_{0\alpha}F_{\beta\gamma} + e^{\alpha 0 lm}\underset{(l=\beta\ m\ \gamma)}{F_{\alpha 0}F_{lm}} + e^{\alpha\beta lm}F_{\alpha\beta}\cdot F_{lm} = \qquad e^{0\alpha\beta\gamma} = e^{\alpha\beta\gamma}$$

$$= \underline{e^{\alpha\beta\gamma}F_{0\alpha}F_{\beta\gamma}} + \underline{e^{\alpha 0\beta\gamma}F_{\alpha 0}F_{\beta\gamma}} + e^{\alpha\beta 0\gamma}\cdot F_{\alpha\beta}F_{0\gamma} + e^{\alpha\beta\gamma 0}F_{\alpha\beta}F_{\gamma 0} =$$

$$= 2e^{\alpha\beta\gamma}(-F^{0\alpha})\cdot F^{\beta\gamma} + 2e^{0\alpha\beta\gamma}F_{\alpha\beta}F_{0\gamma} =$$

$$= -2(-E^{\alpha})e^{\alpha\beta\gamma}(-e^{\beta\gamma\nu}H^{\nu}) + 2e^{\alpha\beta\gamma}(-e^{\alpha\beta\nu}H^{\nu})E^{\gamma} =$$

$$= -4E^{\alpha}H^{\nu}\delta^{\alpha\nu} - 4\delta^{\gamma\nu}H^{\nu}E^{\gamma} = -8\vec{E}\vec{H}.$$

$$\boxed{e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = -8\vec{E}\cdot\vec{H}}$$

Если в какой-то системе угол м-ду $\vec{E}$ и $\vec{H}$ острый (тупой) то он будет таким и в любой др. системе

Можно найти такую сист. отсчета где поле ||-ны.

$$\vec{E}_0\vec{H}_0 = EH \qquad H_0^2 - E_0^2 = H^2 - E^2.$$

Если $\vec{E}'=0$: $\vec{E} = -\frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{H}$ $\qquad v = -c\frac{E}{H}$ $(E<H)$

Если $\vec{H}'=0$: $\vec{H} = \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{H}$ $\qquad v = c\frac{H}{E}.$

Составим комплекс. вектор. $\vec{F} = \vec{E} + i\vec{H}$ как его компоненты преобр.?

$$F_x = E_x + iH_x = E_x' + iH_x' = F_x' ;$$

$$F_y = E_y + iH_y = \frac{E_y' + (V/c)H_z'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + i\gamma(H_y' - V/c\,E_z') = \gamma F_y' - \gamma i\frac{v}{c}(\underbrace{E_z' + iH_z'}_{F_z'})$$

$$F_y = \gamma F_y' - i\gamma\beta F_z' ;$$

$$F_z = E_z + iH_z = \gamma(E_z' - \beta H_y') + i(H_z' + \beta E_y')\gamma = \gamma\cdot i\beta F_y' + \gamma\cdot F_z'$$

$$F_z = i\gamma\beta F_y' + \gamma\cdot F_z'$$

Если записать $tg\alpha = i\beta \Rightarrow \cos\alpha = \gamma$, $\sin\alpha = i\beta\gamma$ Тогда

$$\begin{cases} F_x = F_x' \\ F_y = F_y'\cos\alpha - F_z'\cdot\sin\alpha \\ F_z = F_y'\cdot\sin\alpha + F_z'\cdot\cos\alpha \end{cases}$$

← Поворот в пл-сти YZ.

Мы знаем что при повороте: не меняется квадрат вектора

$$F^2 = F'^2 : \underline{E^2 - H^2} + 2i\underline{\underline{\vec{E}\vec{H}}} = \underline{E'^2 - H'^2} + 2i\underline{\underline{\vec{E}'\vec{H}'}}$$

Значит $F^{ik}F_{ik}$ и $e^{iklm}F_{ik}F_{lm}$ $\Big\}$ invar единственные.

Уравнения ЭМ поля

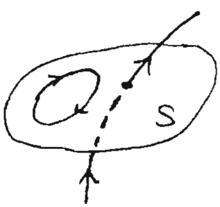
Введем понятие о силовой линии.

$\vec H$, рассмотрим некую поверхность (элемент); $\vec H d\vec S$

Всегда можно найти ситуац. когда $\vec H d\vec S = 1$. $\Rightarrow$ говорим что ч-з данных $d\vec S$ проходит одна сил. линия.

$\int_S \vec H d\vec S$ – общее кол-во силовых линий, пронизывающих пов-сть S.

Замкн. пов-сть S



$\oint_S \vec H d\vec S = 0$. Отсутствие магн. зарядов $\Rightarrow$ поток $\vec H$ ч-з любую замкн. $S = 0$.

$\oint \vec H d\vec S = 0$. Т-ма Гаусса $\oint_S \vec H d\vec S = \int_V \mathrm{div}\,\vec H\, dV$

$\mathrm{div}\,\vec H = 0$

Фарадей установил з-н индукции
ЭДС в замкн. контуре ~ изменению магн. потока прониз. эту площадку в ед. времени.

$$Э.Д.С = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

В свою очередь $Э.Д.С. = \oint_L \vec E d\vec r$;

$$\oint_L \vec E d\vec r = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec H d\vec S$$ – з-н индукц. в S ф-ме.

Т-ма Стокса (пов-сть S опир. на контур L): $\int_S \left(\mathrm{rot}\,\vec E + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec H}{\partial t}\right) d\vec S = 0$

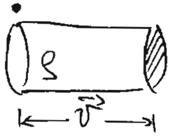
$$\mathrm{rot}\,\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec H}{\partial t}$$

Iая пара УМ в диф. ф-ме
$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\vec H = 0 & (2) \\ \mathrm{rot}\,\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec H}{\partial t} & (1). \end{cases}$$

Т-ма Гаусса в электродинамике: $\oint_S \vec E d\vec S = 4\pi e$
(где e – полный заряд наход. в S)

$e=\int_V \rho\, dV$; $\int_V(\mathrm{div}\vec E - 4\pi\rho)\,dV=0$ $\underline{\mathrm{div}\vec E = 4\pi\rho}$ – в природе ∃ электр. заряды.

(ρ - плотность заряда.) Ток проводимости - ток образованный движ. зарядами.



$\vec j=\rho\vec v$ - за секунду весь заряд вытечет из объема.

$\int_S \vec j\, d\vec S = \int_S \rho\vec v\, d\vec S$ – сила тока через пов-сть S в ед. времени.

$\frac{\partial e}{\partial t} = -\oint_S \rho\vec v\, dS$ „–" - заряд вытекает.

$e=e(t)$ $\frac{\partial}{\partial t}\int_V\rho\, dV = -\oint_S \vec j\, d\vec S$; $\int_V\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\vec j\right)dV=0$

$\underline{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\rho\vec v=0}$ - ур-е непрерывности (з-н сохр. заряда)

Если $\rho\ne\rho(t)$ то $\mathrm{div}\vec j=0$ ⇒ силовые линии замкнуты.

$\rho=\rho(t)$, $\mathrm{div}\vec j + \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi}\mathrm{div}\vec E=0$, $\mathrm{div}\left(\vec j+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec E}{\partial t}\right)=0$

силовые лин. ↑ величины замкнуты.

$\vec j_{полн}=\vec j_{пр}+\vec j_{смещ}$ $\vec j_{см}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec E}{\partial t}$

Для пост. токов был известен з-н Био-Савара-Лапласа

$\oint_L \vec H\, d\vec l = \frac{4\pi}{c}I$; I - полный ток пронизывающий пов-сть

$I=\int_S\vec j\, d\vec S$; Максвелл учел ток смещения:

$\oint_L\vec H\, d\vec l = \frac{4\pi}{c}\int_S\left(\vec j+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec E}{\partial t}\right)d\vec S$ (S-ая форма)

$\int_S \mathrm{rot}\vec H - \frac{4\pi}{c}\vec j - \frac1c\frac{\partial\vec E}{\partial t}\, d\vec S=0$ $\mathrm{rot}\vec H=\frac1c\frac{\partial\vec E}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\vec j$

Вторая пара УМ
$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} & (1) \quad \oint\limits_{L} \vec{H}d\vec{r} = \frac{4\pi}{c}\int\limits_S (\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t})d\vec{S} \\ \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho & (2) \quad \oint\limits_S \vec{E}d\vec{S} = 4\pi\int\limits_V \rho dV \end{cases}$$

УМ позволяют по задан. ρ и $\vec{j}$ найти $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r},t)$ $\vec{H} = \vec{H}(\vec{r},t)$.

Каким ур-ям удовлетвор. потенциалы ЭМ поля?

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi \qquad \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}. \quad ;$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi\right) + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad ;$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad ;$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad ; \\ \operatorname{div}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi\right) = 4\pi\rho \quad ; \qquad \Delta\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} = -4\pi\rho \end{array}\right\}$$

Эта сист. ур-ний находит $\vec{A}$ и φ по изв. ρ и $\vec{j}$.

Но $\vec{A}$ и φ определены неоднозначно. $\vec{A} = \vec{A}' + \operatorname{grad} f$

$$\varphi = \varphi' + \left(-\frac{1}{c}\right)\frac{\partial f}{\partial t}$$

Используем эту неоднозначность.

Выберем ф-цию f, так чтобы упростились ур-я.

Накладываем усл. 1) $\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ усл. Лоренца (калибровка

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

2) $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ Кулоновская калибровка потенциалов.

$$\begin{cases}\Delta\vec A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec A}{\partial t^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi = -\frac{4\pi}{c}\vec j\\ \Delta\varphi = -4\pi\rho\end{cases}$$

применяются обычно при решении задач с ГУ.

Для отдельного заряда $\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = e\vec v\vec E$, Если $\frac{d\mathcal{E}_k}{dt}<0 \Rightarrow$ энергия переходит к полю

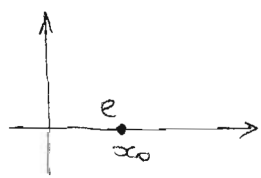
Рассм. систему зарядов

$$\frac{d}{dt}\sum_a \mathcal{E}_a = \sum_a e_a \vec v_a(t)\vec E(t,\vec r)\Big|_{\vec r=\vec r_a(t)}$$

(поле берем в той т-ке где нах-ся в дан. моме. врем. заряд).

Если ввести плотность заряда:

полный заряд $e=\int_V\rho\, dV$



$\rho = e\delta(x-x_0)$; $\rho(t,\vec r)=\sum_a e_a\delta(\vec r-\vec r_a(t))$

Проверим: $\int\rho\, dV = \sum_a e_a\int\delta(\vec r-\vec r_a(t))\,dV = \sum_a e_a\cdot 1 = \sum_a e_a$

$$\frac{d}{dt}\sum_a\mathcal{E}_a = \int \underbrace{\rho(t,\vec r)\vec v(t,\vec r)}_{\vec j(t,\vec r)}\vec E(t,\vec r)$$

(поле берем без огранич. ($r=r_a(t)$) они уже сидят в ρ.)

$$\frac{d}{dt}\sum_a\mathcal{E}_a - \int_V\vec j\vec E\, dV = 0$$

V - тот объем где $j\neq0$ т.е. там где нах-ся частиц.

Рассм. замкн. сист. „зар. частицы + поле", тогда

$-\int_V\vec j\vec E\, dV$ - измен. энергии поля

Т.к. $\operatorname{rot}\vec H = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec E}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\vec j$, то $\frac{d}{dt}\sum_a\mathcal{E}_a = \frac{c}{4\pi}\int_V \vec E(\underbrace{\operatorname{rot}\vec H}_{\vec E\cdot(\nabla\times\vec H)} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec E}{\partial t})\,dV =$

$$= \frac{c}{4\pi}\int_V\Big\{-\nabla\cdot(\vec E\times\vec H)+\vec H\cdot(\nabla\times\vec E) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{E^2}{2}\Big\}dV =$$

$\int_V dV\,\nabla\ldots = \oint_S d\vec S\ldots$

$$= -\oint_S d\vec S\cdot\frac{c}{4\pi}(\vec E\times\vec H) - \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{8\pi}\int_V\{E^2} - \int_V dV\Big\{\frac{1}{8\pi}\frac{\partial E^2}{\partial t}+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial H^2}{\partial t}\Big\} =$$

$\nabla\times\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec H}{\partial t}$

$$= -\oint_S \vec{S}\,d\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t}\int_V w\,dV$$, где $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}\times\vec{H}]$, $w = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{H^2}{8\pi}$.

плотность энергии ЭМ поля (перенести экс.)

$$\frac{d}{dt}\sum_a \mathcal{E}_a + \frac{\partial}{\partial t}\int_V w\,dV = -\oint_S \vec{S}\,d\vec{S} \qquad [*].$$

1. Пусть S-нее ведение по ∞-ому объему. Все физ. величины на ∞-ти равны ϕ.

V_∞: $\frac{d}{dt}\sum_a \mathcal{E}_a + \frac{\partial}{\partial t}\int_{V_\infty} w\,dV = 0$ В выр-е $\frac{d}{dt}\sum_a \mathcal{E}_a$ входит поток частиц. Если нет потока частиц, то $\frac{d}{dt} \to \frac{\partial}{\partial t}$

2. V, S $\frac{d}{dt}\sum_a \mathcal{E}_a + \frac{\partial}{\partial t}\int_V w\,dV = -\oint_S \vec{S}\,d\vec{S}$

$\vec{S}$ – плотность потока энергии ЭМ поля.

Запишем з-н сохр. энергии $[*]$ в диф. ф-ме

$$\int_V \vec{j}\cdot\vec{E}\,dV + \frac{\partial}{\partial t}\int_V w\,dV = -\int_V \operatorname{div}\vec{S}\,dV;$$

$$\int_V \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{S} + \vec{j}\cdot\vec{E}\right)dV = 0 \text{ – выполняется } \forall V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{S} + \vec{j}\cdot\vec{E} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2}{8\pi} + \frac{H^2}{8\pi}\right) + \operatorname{div}\frac{c}{4\pi}[\vec{E}\times\vec{H}] = -\vec{j}\vec{E}$$

идет на разгон частиц

Расм. з-н сохр. импульса для системы „зар. частицы + ЭМ поле".

Для одной частицы: $\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H}$, а для всей системы:

$$\frac{d}{dt}\sum_a \vec{p}_a = \sum_a e_a\vec{E}(\vec{r},t)\Big|_{\vec{r}=\vec{r}_a} + \frac{e}{c}\vec{v}_a(t)\times\vec{H}(t,\vec{r})\Big|_{\vec{r}=\vec{r}_a} = \ldots$$

Перейдем от суммирования к $\int$-ию по всему объему где нах-ся частицы.

$$\ldots = \int_V dV \left\{ \rho(t,\vec r)\vec E(t,\vec r) + \frac{1}{c}\vec j(t,\vec r)\times\vec H(t,\vec r)\right\} = \ldots$$

$$\operatorname{div}\vec E = 4\pi\rho, \quad \nabla\times\vec H = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec j$$

$$\ldots = \frac{1}{4\pi}\int_V dV \left(\vec E \operatorname{div}\vec E + \left\{\nabla\times\vec H - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec E}{\partial t}\right\}\times\vec H\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_V dV \left\{\vec E\operatorname{div}\vec E - \vec H\times\operatorname{rot}\vec H - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec E\times\vec H) + \frac{1}{c}\vec E\times\frac{\partial\vec H}{\partial t}\right\} = \ldots \qquad \operatorname{rot}\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec H}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_V dV\left\{\vec E\operatorname{div}\vec E - \vec E\times\operatorname{rot}\vec E + \vec H\cdot\underset{0}{\underset{\parallel}{\operatorname{div}\vec H}} - \vec H\times\operatorname{rot}\vec H\right\} - \frac{\partial}{\partial t}\int_V dV\frac{\vec E\times\vec H}{4\pi c} = \frac{d}{dt}\sum_a \vec p_a$$

Преобразуем объемный $\int$ в (для симме три. поверхностный.

$$\vec E\operatorname{div}\vec E = \vec E(\nabla\cdot\vec E) = (\nabla\cdot\vec E)\vec E - (\vec E\nabla)\vec E$$
$$\vec H\operatorname{div}\vec H = \vec H(\nabla\cdot\vec H) = (\nabla\cdot\vec H)\vec H - (\vec H\nabla)\vec H$$

тогда выр-е в $\{\ldots\}$ будет равно:

$$\{\ldots\} = (\nabla\vec E)\vec E + (\nabla\vec H)\vec H - \left\{(\vec E\nabla)\vec E + \vec E\times\operatorname{rot}\vec E + (\vec H\nabla)\vec H + \vec H\times\operatorname{rot}\vec H\right\} =$$

$$= (\nabla\vec E)\vec E + (\nabla\vec H)\vec H - \operatorname{grad}\frac{E^2+H^2}{2}$$

$$\operatorname{grad}(\vec a\cdot\vec b) = (\vec a\nabla)\vec b + (\vec b\nabla)\vec a + \vec a\times\operatorname{rot}\vec b + \vec b\times\operatorname{rot}\vec a$$

Посмотрим α-компоненту

$$((\nabla\vec E)\vec E)_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\beta}(E_\alpha E_\beta)$$ по β-суммир. α - говорящ

$$\frac{d}{dt}\sum_a p_\alpha^{(a)} + \frac{\partial}{\partial t}\int_V dV\left(\frac{\vec E\times\vec H}{4\pi c}\right)_\alpha = -\frac{1}{4\pi}\int_V dV\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(-E_\alpha E_\beta - H_\alpha H_\beta + \frac{E^2+H^2}{2}\delta_{\alpha\beta}\right) = \ldots$$

т.к. вынесли $\frac{\partial}{\partial x_\beta}$ за скобки

Для правого $\int_V$: $\int_V dV\frac{\partial}{\partial x_\beta}\ldots = \oint_S dS_\beta$

$$\ldots = -\oint_S dS_\beta T_{\alpha\beta}, \quad \text{где } T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left\{-E_\alpha E_\beta - H_\alpha H_\beta + \frac{E^2+H^2}{2}\delta_{\alpha\beta}\right\}$$

$\vec p^{(f)} = \frac{1}{4\pi c}\vec E\times\vec H$ – плотность импульса ЭМ поля.

$$\frac{d}{dt}\sum_a p_a^{(\alpha)} + \frac{\partial}{\partial t}\int_V dV\, p_\alpha^{(f)} = -\oint_S T_{\alpha\beta}n_\beta dS \qquad \vec p^{(f)} = \frac{\vec S}{c^2}$$

1. $V_\infty, S_\infty \Rightarrow \oint_S\ldots = 0$?

$$\frac{d}{dt}\sum_a p_a^{(\alpha)} + \frac{\partial}{\partial t}\int_{V_\infty} p_\alpha^{(f)}dV = 0$$

2. V, S $\quad \frac{d}{dt}\sum_a p_\alpha^{(a)} + \frac{\partial}{\partial t}\int_V dV\, p_\alpha^{(f)} = -\oint_S T_{\alpha\beta}\, n_\beta\, dS$

Если частицы не уходят, то импульс будет теряться за счет ухода импульса поля.

$T_{\alpha\beta}$ – плотность потока импульса (α-составляющая) в направлении β тензор натяжений (напряжений) Максвелла.

Если частиц нет $p_\alpha^{(a)} = 0$: $\quad \frac{\partial}{\partial t}\int_V p_\alpha^{(a)}\, dV = -\oint_S T_{\alpha\beta}\, n_\beta\, dS$

Т.к. изменен. импульса в ед. времени – сила: $\quad f_\alpha = T_{\alpha\beta}\, n_\beta$ – сила действующая на ед. пов-сти со стороны ЭМ п.

$n_\alpha f_\alpha = T_{\alpha\beta}\, n_\alpha n_\beta$ – давление света.

Импульс и плотн. импульса ЭМП – измеряемые величины.

Перейдем к 4-мерн. описанию эм поля

Будем исходить из принципа наим. действия.

$$S_m + S_{mf} = -mc\int ds - \frac{e}{c}\int A_i\, dx^i$$

Варьирование действия дало: $\quad \frac{d\vec p}{dt} = e\vec E + \frac{e}{c}\vec v \times \vec H$

$$\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec A}{\partial t} - \text{grad}\,\varphi \Rightarrow \text{rot}\,\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overset{\vec H}{\overset{\parallel}{\text{rot}\,\vec A}} - \overset{0}{\overset{\equiv}{\text{rot}\,\text{grad}\,\varphi}}$$

$$\text{rot}\,\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec H}{\partial t}$$

$\text{div}\,\vec H = \underset{0}{\underset{\equiv}{\text{div}\,\text{rot}\,\vec A}} \qquad \text{div}\,\vec H = 0.$

(ж) $\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^m} = 0 \qquad$ 4-мерная запись I-ой пары УМ.

$l \neq m \neq k$ $\quad\uparrow$ полностью антисимметр.

Умн (*)$\cdot e^{iklm}$ и просумм по k, l, m

$$e^{iklm}\underset{(k\rightleftarrows l)}{\frac{\partial F_{mk}}{\partial x^l}} + e^{iklm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} + e^{iklm}\underset{(k\rightleftarrows m)}{\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^m}} = 0\ ;$$

$$e^{iklm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} + \underset{(-1)}{e^{ilkm}}\frac{\partial F_{ml}^{(-1)}}{\partial x^k} + \underset{(0)}{e^{imlk}}^{(-1)}\frac{\partial F_{ml}^{(-1)}}{\partial x^k} = 0\ ;$$

$$3e^{iklm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0\ ; \qquad e^{iklm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0\ ;$$ 4-мерн. запись I-ой пары УМ.

$\underline{i=0}$: $$0 = e^{0klm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = e^{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} = e^{\alpha\beta\gamma}\left(-e^{\beta\gamma\nu}\frac{\partial H^\nu}{\partial x^\alpha}\right) = -2\frac{\partial H^\alpha}{\partial x^\alpha} = -2\,\mathrm{div}\,\vec{H}$$

$$\left\{ e^{0\alpha\beta\gamma} := e^{\alpha\beta\gamma} \quad k,l,m=1,2,3 \right\} \qquad \left\{ \begin{array}{l} F^{\beta\gamma} = -e^{\beta\gamma\nu}H^\nu \\ e^{\alpha\beta\gamma}e^{\nu\beta\gamma} = 2\delta^{\alpha\nu} \end{array} \right\}$$

$\underline{i=\alpha}$: $$0 = e^{\alpha klm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} \underset{\left(\substack{\text{сум.}\\ \text{по } k}\right)}{=} e^{\alpha 0lm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^0} + e^{\alpha\beta lm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^\beta} =$$

$$= e^{\alpha 0\beta\gamma}\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^0} + e^{\alpha\beta 0\gamma}\frac{\partial F_{0\gamma}}{\partial x^\beta} = \underset{\left(e^{0\alpha\beta\gamma} = e^{\alpha\beta\gamma}\right)}{\text{наведем порядок индексов}} = -e^{0\alpha\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial x^0}\left(-e^{\beta\gamma\nu}H^\nu\right) +$$

$$+ \underset{(F^{0\gamma} = -E^\gamma)}{e^{0\alpha\beta\gamma}\left(-\frac{\partial F^{0\gamma}}{\partial x^\beta}\right)} = \frac{\partial}{c\partial t}H^\alpha + e^{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial x^\beta}E^\gamma = \underline{\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \nabla\times\vec{E}\right)_\alpha}$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Надо получить в действии слагаемое описывающее само ЭМ поле, т.е.

$$S = S_m + S_{mf} + S_f$$ т.е. мы расм систему зар. частицу в ЭМ поле.

$S_m = -\sum\limits_{\text{по всем зарядам}} mc\int ds$ $\quad S_{mf} = -\sum\limits_{\text{по всем зарядам}} \frac{e}{c}\int A_i dx^i$

A_i - берется в тех т-ках где нах-ся заряд.

Надо перейти от точечного распред. заряда к непрерывн.
чтобы брать поле в люб. т-ке в люб мом. времени.

$$\rho(\vec{r},t) = \sum_a e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$$

$$S_{mf} = -\sum \frac{e}{c}\int A_i dx^i = -\frac{1}{c}\int \rho(\vec{r},t) A_i(\vec{r},t) dx^i dV =$$ dV - 3-мерн. объем.

$$= -\frac{1}{c}\int \rho A_i \frac{dx^i}{dt} dt\, dV \cdot \frac{c}{c} = \left\{ dx^0 = c\,dt \right\} = -\frac{1}{c^2}\int \rho \frac{dx^i}{dt} A_i\, d\Omega$$

$d\Omega = dx^0 dV =$
$= dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$
эл-т 4-мерн. объема

Доказать $d\Omega = d\Omega'$

Т.к. S_{mf} - скаляр, $d\Omega$ - ск., A_i - 4-вектор $\Rightarrow$

$\rho \frac{dx^i}{dt}$ - 4вектор.

4-вектор плотности тока $j^i = \rho \frac{dx^i}{dt}$

$$j^0 = \rho \frac{dx^0}{dt} = \rho c \; ; \quad j^\alpha = \rho \frac{dx^\alpha}{dt} = \rho v^\alpha \quad (\vec{j} = \rho \vec{v}) \qquad j^i(j^0, \vec{j})$$

Теперь мы можем записать преобр. Лоренца для j^i.

Для люб. 4-вектора

$$A^0 = \gamma \cdot \left(A'^0 + \frac{V}{c} A'^1\right) \quad \Rightarrow \quad \rho = \gamma\left(\rho' + \frac{V}{c^2} j'_x\right)$$

$$A^1 = \gamma \cdot \left(A'^1 + \frac{V}{c} A'^0\right) \quad \Rightarrow \quad j_x = \gamma\left(j'_x + V\rho'\right)$$

В нерелятив сл. $\rho = \rho'$

$$j_x = j'_x + V\rho$$
(конвекционный ток).

Т.о. $S_{mf} = -\frac{1}{c^2}\int A_i j^i d\Omega$.

Рассм. слаг S_f.
ЭМ поле удовлетвор. принципу суперпозиции. ⇒
⇒ ур-е для ЭМ поля - линейное диф. ур-я.

В S_f должны войти величины квадратичные по полю инвариантные по отн. к преобр. Лоренца

1) $F_{ik}F^{ik} = 2(H^2 - E^2)$ 2) $e^{iklm}F_{ik}F_{em} = -8\vec{E}\vec{H}$

Докажем что 2) 4-мерн дивергенция

$$e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = e^{iklm}F_{ik}\underbrace{\left(\frac{\partial A_m}{\partial x^l} - \frac{\partial A_l}{\partial x^m}\right)}_{l \rightleftarrows m} = 2e^{iklm}F_{ik}\frac{\partial A_m}{\partial x^l} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^l}2e^{iklm}F_{ik}A_m - 2e^{iklm}A_m\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}$$

$$e^{iklm}A_m\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} = e^{iklm}A_m\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right) =$$

$$= \underbrace{e^{iklm}}_{\text{абс антисим.}}A_m\left(\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^l\partial x^i}}_{\text{сим. по } l \text{ и } i}A_k - \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^l\partial x^k}}_{\text{сим. по } l \text{ и } k}A_i\right)$$

произведение сим. на антисим. тензор $\equiv 0$.

$$S_f = a\int F_{ik}F^{ik}dt\,dV$$

a зависит от выбора системы единиц.
в Гауссовой сист.

$a = -\frac{1}{16\pi}$

; почему „−" : $F_{ik}F^{ik} = 2(H^2 - E^2)$

$\vec{E} \sim \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ для быстро перемен. полей $\vec{E}$ растет.

$F_{ik}F^{ik} \sim -\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^2$, и тогда наше S не будет иметь минимума ⇒ $a = -\frac{1}{16\pi}$.

$$S_f = -\frac{1}{16\pi}\int F_{ik}F^{ik}dt\,dV \; ; \quad S_f = -\frac{1}{16\pi}\int 2(H^2 - E^2)\,dt\,dV = \int_{t_1}^{t_2} L_f(t)\,dt$$

$$L_f = \int\frac{(E^2 - H^2)}{8\pi}dV$$

плотность ф. Лагранжа $\frac{1}{8\pi}(E^2 - H^2)$.

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}\,d\Omega$$

Теперь можно находить II-ю пару УМ в 4-виде.

Надо варьировать обобщ. коорд. поля – потенциалы поля.
По заданному движению частиц найдем II пару
(не будем варьировать коорд. частиц).

$$\delta S = -\frac{1}{c^2}\iint_{t_1}^{t_2} j^i\,\delta A_i\,d\Omega - \frac{1}{16\pi c}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{t_1}^{t_2}\delta(F_{ik}F^{ik})\,d\Omega$$

интегрирование идет по ∞-ому простр. в конечн. пром-к времени

$$\delta(F_{ik}F^{ik}) = \delta F_{ik}\cdot F^{ik} + F_{ik}\,\delta F^{ik} = 2F^{ik}\delta F_{ik} =$$

$$= 2F^{ik}\delta\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right) = -4F^{ik}\delta\frac{\partial A_i}{\partial x^k} = -4F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}A_i =$$

здесь сум. и по i и по k

$i \rightleftarrows k$

$$= -\frac{\partial}{\partial x^k}4F^{ik}\delta A_i + 4\delta A_i\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}$$

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int d\Omega\left\{\frac{1}{c}j^i\delta A_i + \frac{1}{16\pi}\cdot 4\left(-\frac{\partial}{\partial x^k}F^{ik}\delta A_i + \delta A_i\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\right)\right\} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi c}\int F^{ik}\delta A_i\,dS_k - \frac{1}{c}\int d\Omega\,\delta A_i\left(\frac{1}{c}j^i + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\right) = 0$$

интегр. по гиперпов-сти

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c}j^i$$

$$\int\frac{\partial}{\partial x^k}(F^{ik}\delta A_i)\,d\Omega = \oint F^{ik}\delta A_i\,dS_k = 0$$

Последний $\int$ обр. в ноль из-за того, что ЭМ поле на ∞ равно 0 и $\delta A_i\big|_{t_1}^{t_2} = 0$.

$$\int\frac{\partial}{\partial x^k}(F^{ik}\delta A_i)\,dV\,dt \underset{\text{просум по } k}{=} \int\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(F^{i\alpha}\delta A_i)\,dV\,dt +$$

$$+\int\frac{\partial}{\partial x^0}(F^{i0}\delta A_i)\,dV\,dt = \int_{t_1}^{t_2}dt\oint_{S_\infty}F^{i\alpha}\delta A_i\,dS_\alpha +$$

$\parallel$ 0 т.к. ЭМ поле на ∞ = 0.

$$+\frac{1}{c}\int_{t_1}^{t_2} dt\,\frac{\partial}{\partial t}\int F^{i0}\delta A_i\, dV = \underbrace{\frac{1}{c}\int_V F^{i0}\delta A_i\, dV\Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0 \text{ т.к. } \delta A_i|_{t_1}^{t_2}=0}$$

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i \quad (*)$$

$\underline{i=0}$ $$\frac{\partial F^{0k}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^0 ; \quad \frac{\partial F^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} = -\frac{4\pi}{c} j^0 ; \quad -\frac{\partial E^\alpha}{\partial x^\alpha} = -\frac{4\pi}{c} c\rho ; \quad \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho$$

$i=\alpha$ $$\frac{\partial F^{\alpha k}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha ; \quad \frac{\partial F^{\alpha 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha ;$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E^\alpha}{\partial t} - \underbrace{e^{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial H^\gamma}{\partial x^\beta}}_{(\nabla\times\vec{H})_\alpha} = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha ; \quad \nabla\times\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\underbrace{\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{H}}_{\equiv 0} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\operatorname{div}\vec{E}}_{=4\pi\rho} + \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\vec{j} ; \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$$

Теперь можно записать ур-е сохр. заряда в 4-виде.

Продиф (*) по x^i $$\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}}_{\text{абс. сим. тен.}}\underbrace{F^{ik}}_{\text{абс антисим тен}} = -\frac{4\pi}{c}\frac{\partial j^i}{\partial x^i}$$

— их произведен. $\equiv 0$.

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0$$ з-н сохр. заряда (так она записывается во всех системах)

Действительно $$\frac{\partial j^0}{\partial x^0} + \frac{\partial j^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0.$$

Постоянное электрическое поле.

Из УМ $\Rightarrow$ что ? определение ур-ний:
$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \end{cases}$$

Во многих сл. проще перейти к потенциалам

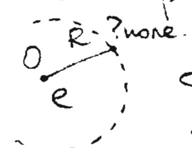
$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi \quad ; \quad \Delta\varphi = -4\pi\rho \quad \text{- ур-е Пуассона}$$

Если в рассм. обл. $\rho = 0$ $\quad \Delta\varphi = 0$ $\quad$ ур-е Лапласа

φ не имеет экстремальных знач.

Усл. экст. 1ые производные $= 0$, 2ые были одного знака

Как определить поле создаваемое неподвижным зарядом.



сфер. повстъ.

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = 4\pi e \;; \qquad d\vec{S} = R^2 do\, \vec{e}_r$$

В силу симметрии задачи $\varphi = \varphi(R)$, тогда

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\frac{d\varphi}{dR}\vec{e}_r \equiv E(R)\cdot\vec{e}_r$$

$$\int_{4\pi} E(R)\underbrace{\vec{e}_r\vec{e}_r}_{=1} do\, R^2 = 4\pi e \;;$$

$$4\pi E(R) R^2 = 4\pi e \;; \quad E(R) = \frac{e}{R^2} \;; \quad \vec{E} = \frac{e}{R^2}\vec{e}_r = \frac{e\vec{R}}{R^3}$$

R - расстояние от заряда до т-ки наблюдения.

$$\varphi(R) = \frac{e}{R}$$

Для системы точечн. зарядов в силу пр. суперпоз.

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{R_a}$$ если ввести плотность распред зарядов

$$\rho = \sum_a e_a \delta(\vec{R} - \vec{R}_a)$$

$$\varphi = \int \frac{\rho}{R} dV \;; \qquad \rho = e\delta(R)$$ - для 1ого заряда в нач. коорд.

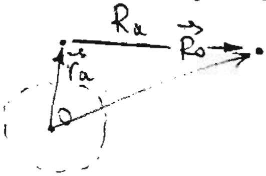
$$\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\delta(\vec{R})$$

$$\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = \begin{cases} 0, & R \neq 0 \\ -4\pi\delta(\vec{R}) \end{cases}$$

Запишем ур-е когда имеем дело с расстоянием большими по ср. с мин. размерами системы.

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{R_a}$$

R_a - расст. от a-ого заряда до т-ки наблюдения.



$$|\vec{R}| \gg |\vec{r}_a|$$

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{|\vec{R}_0 - \vec{r}_a|}$$

$$f(\vec{R}_0 - \vec{r}_a) \underset{\text{в ряд Тейлора}}{=} f(\vec{R}_0) - (\vec{r}\nabla) f(\vec{R}_0) + \frac{1}{2} x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial X^\alpha \partial X^\beta} f(\vec{R}_0) + \ldots$$

, где x_α, x_β - коорд. $\vec{r}$
$X_{\alpha,\beta}$ - коорд $\vec{R}_0$.

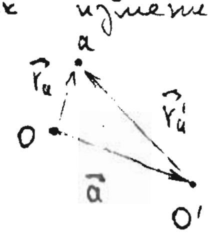
$$\varphi = \frac{\sum_a e_a}{R_0} - \sum_a e_a \vec{r}_a \nabla \frac{1}{R_0} + \frac{1}{2} \sum e x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial X^\alpha \partial X^\beta} \frac{1}{R_0} + \ldots = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}$$

Больше расст. заряды - как один $\varphi^{(0)} = \frac{\sum_a e_a}{R_0}$; Если система электронейтр. т.е. $\sum_a e_a = 0$, тогда

$$\varphi^{(1)} = -(\vec{d}\nabla)\frac{1}{R_0}$$

где $\vec{d} = \sum_a e_a \vec{r}_a$ - дипольный момент системы зарядов.

Что если мы перейдем к новому нач. отсчету? Как изменится $\vec{d}$?



$$\vec{d} = \sum_a e \vec{r} = \sum e(\vec{r}' + \vec{a}) =$$

$$= \vec{a}\sum e + \sum e\vec{r}' = \vec{a}\sum e + \vec{d}'$$

Если $\sum e \neq 0$ тогда при $\vec{a} = \frac{\sum e\vec{r}}{\sum e}$ $\vec{d}' = 0$

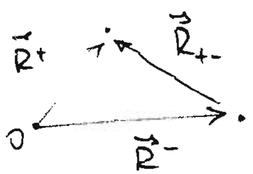
Если $\sum e = 0$: $\vec{d} = \vec{d}'$

Полный заряд $e^+ = \sum_a \vec{r}_a^+ e^+$ $e^- = -\sum_a \vec{r}_a^- e^-$

$$\vec{d} = \sum e^+ \vec{r}_a^+ - \sum e_a^- \vec{r}_a^- = \vec{R}^+ \sum e^+ - \vec{R}^- \sum e^-$$

где $\vec{R}^+ = \frac{\sum e^+ \vec{r}^+}{\sum e^+}$ $\vec{R}^- = \frac{\sum e^- \vec{r}^-}{\sum e^-}$ - центры „+"-ых и „-"-ых зарядов.

Если $\sum e^+ = \sum e^- \equiv q$; $\vec{d} = q(\vec{R}^+ - \vec{R}^-) = q\vec{R}_{+-}$



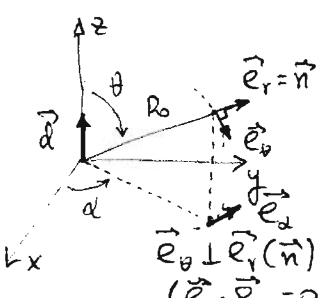
$$\varphi^{(1)} = \frac{\vec{d}\vec{R}_0}{R_0^3} = \frac{\vec{d}\vec{n}}{R_0^2}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}_0}{R_0}$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi^{(1)} = -\nabla\frac{\vec{d}\vec{R}_0}{R_0^3} = -\frac{1}{R_0^3}\nabla(\vec{d}\vec{R}_0) - (\vec{d}\vec{R}_0)\nabla\frac{1}{R_0^3} = \ldots$$

$$\nabla\frac{1}{R_0^3} = -\frac{3}{R_0^4}\nabla R_0 = -\frac{3}{R_0^4}\cdot\frac{\vec{R}_0}{R_0}$$

$$\ldots = \frac{3(\vec{R}_0\vec{d})\vec{R}_0 - R_0^2\vec{d}}{R_0^5} = \frac{3(\vec{n}\vec{d})\vec{n} - \vec{d}}{R_0^3}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi^{(1)} = \nabla\cdot(\vec{d}\nabla)\frac{1}{R_0} = (\vec{d}\nabla)\nabla\frac{1}{R_0}$$



Система сфер. $\vec{E}(E_R, E_\theta, E_\alpha)$

$$E_R = \vec{e}_R\vec{E} = \vec{n}\vec{E} = \frac{1}{R_0^3}\left(3(\vec{n}\vec{d}) - (\vec{n}\vec{d})\right) =$$

$$= \frac{2d}{R_0^3}\cos\theta \; ; \; E_\theta = \vec{e}_\theta\vec{E} = -\frac{\vec{e}_\theta\vec{d}}{R_0^3} =$$

$$= +\frac{d}{R_0^3}\sin\theta$$

$E_\alpha = \vec{e}_\alpha \vec{E} = 0$

$\vec{E}(E_R, E_\theta, 0)$ – поле аксиально симметр. (т.е. не зависит от α).

Полный заряд $\emptyset$ и дипольный момент $\emptyset$. ($\sum_a e_a = 0$ $\vec{d} = 0$)

Тогда $\varphi^{(2)} = \frac{1}{2} \sum e x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial X^\alpha \partial X^\beta} \frac{1}{R_0}$ $R_0 \gg |\vec{r}_a|$, $R_0 \neq 0$ нигде. (так далеко)

$\sum e x_\alpha x_\beta$ – симм. тензор II ранга

$\Delta \frac{1}{R_0} = \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha^2} \frac{1}{R_0} = 0$; $\varphi^{(2)} = \frac{1}{2} \sum e (x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} r^2 \delta_{\alpha\beta}) \frac{\partial^2}{\partial X^\alpha \partial X^\beta} \frac{1}{R_0} =$

$= \frac{1}{6} D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial X^\alpha \partial X^\beta} \frac{1}{R_0}$ $D_{\alpha\beta} \equiv \underset{\text{(по всем зарядам)}}{\sum} e (3 x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta})$ – тензор квадрупольного момента импульса

$\begin{cases} D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha} \\ D_{\alpha\alpha} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ у $D_{\alpha\beta}$ 5 независ. компонент.

Симм. тензор II р. всегда можно привести к главным осям

$D_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} D_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{pmatrix}$; $\frac{\partial}{\partial X_\beta}\left(\frac{1}{R_0}\right) = -\frac{1}{R_0^2} \underset{\text{(}\beta\text{- сост. градиента)}}{\frac{\partial R_0}{\partial X_\beta}} = -\frac{X_\beta}{R_0^3}$

$\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} = -\frac{\partial}{\partial X_\alpha} \frac{X_\beta}{R_0^3} = -\frac{\delta_{\alpha\beta}}{R_0^3} + 3 X_\beta \frac{1}{R_0^4} \frac{X_\alpha}{R_0} = -\frac{\delta_{\alpha\beta}}{R_0^3} + 3 \frac{X_\alpha X_\beta}{R_0^5}$

$\varphi^{(2)} = \frac{D_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{2 R_0^3}$ где $n_\alpha = \frac{X_\alpha}{R_0}$, Запишем в главных осях

$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2R_0^3} \{ D_{xx} n_x^2 + D_{yy} n_y^2 + D_{zz} n_z^2 \}$

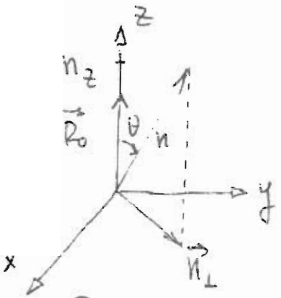
$D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0.$

Ось симметрии n-ого порядка $\Rightarrow$ при повороте вокр. этой оси на угол $\frac{2\pi}{n}$

z – вдоль оси симметрии порядка >2. В этой системе $D_{xx} = D_{yy}$

Обозн. $D_{zz} \equiv D$; $D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2} D$

Тогда $$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2R_0^3}\left\{ D\left(n_z^2 - \frac{1}{2}(n_x^2 + n_y^2)\right)\right\}$$



$$n_\perp^2 = n_x^2 + n_y^2 = \sin^2\theta \ ; \quad n_z^2 = \cos^2\theta$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{D}{4R_0^3}(3\cos^2\theta - 1) = \frac{D}{2R_0^3} P_2(\cos\theta) \ ;$$ где $P_2(\cos\theta)$ – полином Лежандра.

Квадрупольный момент меряют эксперимент.

Рассм. квадруп. потенциал сферически-симм. системы зарядов. Перейдем от точечн. з-в к непр.

$$D_{\alpha\beta} = \sum e(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta}) \qquad D_{\alpha\beta} = \int \rho(\vec{r})(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})\,dV$$

$$\rho(\vec{r}) = \rho(r) \ , \quad dV = r^2\,do\,dr$$

$$D_{\alpha\beta} = \int dr\, r^2 \rho(r)\, r^2 \int_{4\pi} (3n_\alpha n_\beta - \delta_{\alpha\beta})\,do \cdot \frac{4\pi}{4\pi} = \ldots \qquad \left\{ n_\alpha = \frac{x_\alpha}{r} \right\}$$

$$\ldots = 4\pi \int r^4 dr\, \rho(r) \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} (3n_\alpha n_\beta - \delta_{\alpha\beta})\,do}_{\text{усреднение по единичн. сфере}} = \ldots \qquad \frac{1}{4\pi}\int n_\alpha n_\beta\,do = \langle n_\alpha n_\beta \rangle$$

$$\langle n_\alpha n_\beta \rangle_{\text{по углам}} = a\delta_{\alpha\beta} \ ; \quad a - ? \quad \alpha = \beta \quad \langle n_\alpha^2 \rangle = 1 = 3a \qquad a = \frac{1}{3}$$

симм. тензор II ранга

квадрат вектора

$$\langle n_\alpha n_\beta \rangle = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3}$$ Откуда $D_{\alpha\beta} = 0$

$D_{\alpha\beta}=0$ => распределение зарядов симм.

Система зарядов находящаяся во внешнем постоянном электрическом поле.

для единичн. заряда $U=e\varphi$, для системы $U=\sum_a e_a\varphi(\vec r_a)$

Рассм случай когда поле мало меняется мало на расст меньших размеров системы зарядов.

$$U \simeq \sum_a e_a\left\{\varphi_0 + (\vec r_a\nabla)\varphi_0\Big|_0 + \frac{1}{2}x_{a\alpha}x_{a\beta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_{a\alpha}\partial x_{a\beta}}\Big|_0 + \dots\right\}$$

после д-ния φ надо брать в нуле => не зависит от номера заряда

На $\vec r$ поле меняется мало => φ в ряд по $\vec r$.

$$U = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + \dots$$

$$U^{(0)} = \varphi_0\sum e;$$

$$U^{(1)} = \text{grad}\,\varphi_0\sum e\vec r = -\vec E_0\vec d;$$

$$U^{(2)} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\Big|_0\cdot\sum e_a x_\alpha x_\beta = \frac{1}{6}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\Big|_0\sum e(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta}) = \dots$$

$$\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\Big|_0 = \Delta\varphi\Big|_0 = 0$$

т.к источники φ нах-ся вне системы зарядов

$$\dots = \frac{D_{\alpha\beta}}{6}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\Big|_0$$

Доказать $D_{\alpha\beta} = D'_{\alpha\beta}$, если $\sum e = 0$, $\vec d = 0$

при другом начале коорд.

Какая сила действует на систему зарядов во внеш. поле?

$$F = -\text{grad}\,U = -\text{grad}\sum e\varphi = -\sum e\,\text{grad}\,\varphi = \sum e\vec E \approx$$

т.к φ мало меняется на $\vec r$

$$\approx \sum e\left(\vec E_0 + (\vec r\nabla)\vec E\Big|_0\right) = \vec E_0\sum e + (\vec d\nabla)\vec E_0$$

Момент силы, со стороны $\vec{E}$ внеш = ?

$$\vec{K}_E = \sum \vec{r} \times e\underset{\Delta}{\vec{E}_0} = \vec{d} \times \vec{E}_0$$

не зависит от номера заряда

Пример. 1) e_1, e_2 $\quad U = e_1\varphi_2 = e_1 \frac{e_2}{R_{12}} = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}$

2) $\vec{e}_1$ нах-ся в поле диполя $\vec{d}_2$

$$U = e_1 \varphi_2 = e_1 \frac{\vec{R}_{21}\vec{d}}{R_{21}^3}\ ;\ \vec{R}_{21} \text{ - р-в от диполя - до заряда}$$

или $\quad \vec{R}_{12} = -\vec{R}_{21}$

$$U = -\vec{d}_2\vec{E}_1 = -\vec{d}_2 \frac{e_1 \vec{R}_{12}}{R_{12}^3},\ \vec{R}_{12} \text{ - р-в от } e_1 \text{ к диполю}$$

3) $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$ $\quad U = -\vec{d}_1\vec{E}_{d_2} = -\vec{d}_1 \cdot \frac{3(\vec{n}\cdot\vec{d}_2)\vec{n} - \vec{d}}{R^3} = \frac{1}{R^3}\left\{\vec{d}_1\vec{d}_2 - 3(\vec{n}\vec{d}_2)(\vec{n}\vec{d}_1)\right\}$

Постоянное магнитное поле движущейся сист зарядов

Финитнодвижущ. сист. зарядов, р-в. и скорости зарядов конечны.
Усреднение по большому пр-ку времени $\Leftrightarrow$ стационарн. движение

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0 \quad \langle \operatorname{div}\vec{H}\rangle = 0\ ; \quad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\left\langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial \vec{E}}{\partial T}dT = \frac{\vec{E}(T) - \vec{E}(0)}{T} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0 \qquad \begin{cases} \langle \operatorname{div}\vec{H}\rangle = 0 \\ \langle \operatorname{rot}\vec{H}\rangle = \frac{4\pi}{c}\langle \vec{j}\rangle \end{cases}$$

$$\langle \vec{H}\rangle = \operatorname{rot}\langle\vec{A}\rangle \quad \text{пусть } \operatorname{div}\langle\vec{A}\rangle = 0$$

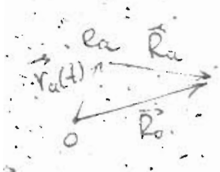
$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\langle\vec{A}\rangle = \frac{4\pi}{c}\langle\vec{j}\rangle\ ; \quad \Delta\langle\vec{A}\rangle = -\frac{4\pi}{c}\langle\vec{j}\rangle\ ;$$

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \qquad \varphi = \int\frac{\rho}{R}dV \qquad \langle\vec{A}\rangle = \frac{1}{c}\int\frac{\langle\vec{j}\rangle}{R}dV$$

R - в т-ке наблюд. $\quad \langle\vec{H}\rangle = \operatorname{rot}\langle\vec{A}\rangle = \frac{1}{c}\int\left(\nabla\frac{1}{R}\times\langle\vec{j}\rangle\right)dV =$

т.к. $\langle\vec{j}\rangle$ - независим от т-ки набл., а от текущ. коорд $\langle\vec{H}\rangle = \frac{1}{c}\int\frac{\langle\vec{j}\rangle\times\vec{R}}{R^3}dV$

$\vec j = \rho \vec v \quad \rho = \sum_a e_a \delta(\vec r - \vec r_a(t))$, тогда $\langle \vec A \rangle = \frac{1}{c} \sum \left\langle \frac{e_a \vec v_a(t)}{|\vec R_0 - \vec r_a(t)|} \right\rangle$



Рассм. поле на ∞-ом расст. $|\vec r_a(t)| \ll \vec R_0$. $\Rightarrow$ в ряд.

$$\langle \vec A \rangle = \frac{1}{cR_0} \sum \langle e \vec v \rangle - \frac{1}{c} \sum \left\langle e \vec v (\vec r \nabla) \frac{1}{R_0} \right\rangle = \frac{1}{cR_0^3} \sum e \vec v (\vec r \vec R_0)$$

т.к. движение финитное $\langle \vec v \rangle = \left\langle \frac{d\vec r}{dt} \right\rangle = 0$

$$\langle \vec v (\vec r \vec R_0) \rangle = \frac{1}{2} \langle \vec v (\vec r \vec R_0) \rangle + \cancel{\frac{1}{2} \left\langle \frac{d}{dt} \vec r (\vec r \vec R_0) \right\rangle} - \frac{1}{2} \langle \vec r (\vec v \vec R_0) \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \langle (\vec r \times \vec v) \rangle \times \vec R_0$$

? 0 т.к. финит. движ.

Магнитный момент системы зарядов

$$\vec m \equiv \frac{1}{2c} \sum e \vec r \times \vec v \qquad \langle \vec A \rangle = \frac{\langle \vec m \rangle \times \vec R_0}{R_0^3} = - \langle \vec m \rangle \times \nabla \frac{1}{R_0}$$

В электростатике

$$\varphi = \frac{\vec d \cdot \vec R_0}{R_0^3}, \quad \langle \vec A \rangle = \frac{\langle \vec m \rangle \times \vec R_0}{R_0^3}, \qquad \langle \vec H \rangle = \operatorname{rot} \langle \vec A \rangle = \nabla \times \frac{\langle \vec m \rangle \times \vec R_0}{R_0^3} =$$

$$= \frac{1}{R_0^3} \nabla \times (\langle \vec m \rangle \times \vec R_0) - (\langle \vec m \rangle \times \vec R_0) \times \nabla \frac{1}{R_0^3} =$$

$$= \frac{1}{R_0^3} \{ \langle \vec m \rangle \operatorname{div} \vec R_0 - (\langle \vec m \rangle \nabla) \vec R_0 \} + \frac{3 (\langle \vec m \rangle \times \vec R_0) \times \vec R_0}{R_0^5}$$

$$\vec H = \frac{3 (\vec R_0 \vec m) \vec R_0 - R_0^2 \langle \vec m \rangle}{R_0^5}$$

Если рассм. систему зарядов у кот-ой $\frac{e}{m} = const$.

$$\vec m = \frac{1}{2c} \sum \frac{e}{m} \vec r \times m \vec v = \| v \ll c \| = \frac{e}{2mc} \sum \vec r \times \vec p = \frac{e}{2mc} \vec M$$

$$\vec m = \frac{e}{2mc} \vec M$$

Рассм. финитнодвиж-ся сист. зарядов во внеш. однород., пост. магн. поле. Какая сила действует на эту систему?

$$\langle\vec F\rangle = \sum\left\langle \frac{e}{c}\vec v\times\vec H\right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt}\sum\frac{e}{c}\vec r\times\vec H\right\rangle = 0$$ т.к. финитн. движ.

момент сил (средний) $\langle\vec K\rangle_H = \sum\left\langle \vec r\times\frac{e}{c}\vec v\times\vec H\right\rangle = \frac{1}{c}\sum e\left\{\langle\vec v(\vec r\vec H)\rangle - \langle\vec H(\vec r\vec v)\rangle\right\} =$

$\langle\vec r\vec v\rangle = \left\langle\frac{d}{dt}r^2\right\rangle = 0$ $\quad = \frac{1}{2c}\sum\langle e(\vec r\times\vec v)\rangle\times\vec H = \vec m\times\vec H$

среднее знач величины меняющейся в конечн. пределах

$$\langle\vec K_H\rangle = \langle\vec m\rangle\times\vec H \quad \text{ср.} \quad \vec K_E = \vec d\times\vec E.$$

Ф-ция Лагранжа системы зарядов наход. в магн. поле.

$L_H = \sum\frac{e}{c}\vec A\vec v =$ для пост. однор. магн. поле $\vec A = \frac{1}{2}\vec H\times\vec r$ $=$

$$= \frac{1}{2c}\sum e(\vec H\times\vec r)\vec v = \vec m\vec H.$$

$$L_H = \vec m\vec H, \quad \text{ср.} \quad L_E = -U = \vec d\vec E.$$

Теорема Лармора

(о поведении заряда во внешних элект. и магнитных полях)

В 1800 получил эф. Доплера (рел.)

Расс. перелет в сист. с одинак e/m находящ.-ся в пост. однор слабом магн. поле и центрально симметр. элект. поле

Ф-ция Лагр. в лабор. сист. отсч.

$$L = \sum\frac{mv^2}{2} + \sum\frac{e}{c}\vec A\vec v - U(r_{\alpha\beta}, r_0)$$

$r_{\alpha\beta}$ – расст м-ду α-ой и β-ой част.

r_0 расст от центра поля до т-ки набл.

Перейдем во вращ. сист. коорд с угл. ч-той $\vec\Omega$, тогда

$$\vec v = \vec v_i + \vec\Omega\times\vec r$$

Тогда ф-ция Лагранжа будет иметь вид:

$$L=\sum \frac{m}{2}\left(v'^2 + 2\vec v'(\vec\Omega\times\vec r) + (\vec\Omega\times\vec r)^2\right) + \sum \frac{e}{c}\frac{1}{2}(\vec H\times\vec r)\vec v - U(r_{a\beta}, r_0) =$$

Ω - мала т.ч. можно выбр. по ср. с

Во вращ. системе все частицы вращ. с одинак. Ω ⇒ $r_{a\beta}$ - не меняются ⇒ $U'=U$ $\quad \vec v' = \vec v - (\vec\Omega\times\vec r)$, $\quad \vec v'(\vec\Omega\times\vec r)\approx \vec v(\vec\Omega\times\vec r)$.

$$= \sum \frac{mv'^2}{2} + \sum m\vec v\left\{\left(\vec\Omega + \frac{e\vec H}{2mc}\right)\times\vec r\right\} - U' =$$

т.к. $\frac{e}{m} = const$ то всегда можно выбрать Ω так, чтобы $(\dots)=0$ т.е.

$$\vec\Omega = -\frac{e}{2mc}\vec H$$

$$L=\sum\frac{mv'^2}{2} - U'$$

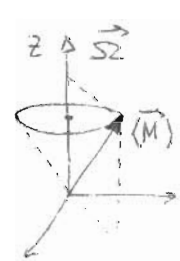
Период вращ. $T=\frac{2\pi}{\Omega} \gg T_{\text{финитного движения}}$ т.к. Ω - мала, т.е. если усреднить $\vec v$, момент по $T_{\text{фин}}$.

$$\left\langle\frac{d\vec M}{dt}\right\rangle_{T_{\text{фин}}} = \text{будет меняться с ч-той } \Omega = \langle\vec K\rangle = \langle\vec m\rangle\times\vec H = \frac{e}{2mc}\langle\vec M\rangle\times\vec H = -\frac{e}{2mc}\vec H\times\langle\vec M\rangle =$$

$$= \vec\Omega\times\langle\vec M\rangle \qquad [*]$$

Это значит:

$\vec\Omega = \vec e_z\Omega$



Умн. [*] на $\vec e_z$, получим

$$\frac{d}{dt}\langle M_z\rangle = 0 \qquad \langle M_z\rangle = Const$$

Умн. [*] на $\langle\vec M\rangle$

$$\frac{d}{dt}\langle M\rangle^2=0 \qquad \langle M^2\rangle = Const.$$

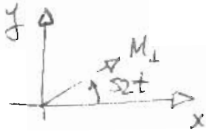
$$\begin{cases}\dfrac{d\langle M_x\rangle}{dt} = -\Omega\langle M_y\rangle; \\[2mm] \dfrac{d\langle M_y\rangle}{dt} = \Omega\langle M_x\rangle\end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\langle M_x\rangle + i\langle M_y\rangle\right) = i\Omega\left(\langle M_x\rangle + i\langle M_y\rangle\right)$$, откуда

$$\langle M_x\rangle + i\langle M_y\rangle = M_\perp e^{i(\Omega t+\alpha)}$$

$$\langle M_x\rangle = M_\perp\cos(\Omega t+\alpha), \quad \langle M_y\rangle = M_\perp\sin(\Omega t+\alpha)$$

$$\langle M_x\rangle^2 + \langle M_y\rangle^2 = M_\perp^2$$



Рассм. неподвижн. сист. зарядов. Они создают $\vec E$. Какова энергия этого поля?

$$U = \frac{1}{8\pi}\int E^2 dV = \left|E = -\mathrm{grad}\varphi\right| = -\frac{1}{8\pi}\int \vec E\,\mathrm{grad}\varphi\, dV = -\frac{1}{8\pi}\int dV\left\{\mathrm{div}(\varphi\vec E) - \varphi\,\mathrm{div}\vec E\right\} =$$

по всему объему где нах-ся заряды

$$= -\frac{1}{8\pi}\underbrace{\oint_{S_\infty} \varphi\vec E\, d\vec S}_{\to 0} + \frac{1}{2}\int\rho\varphi\, dV$$

поле $\vec E$ на ∞ $=0$

Если система зарядов точечная, то

$$U = \frac{1}{2}\int\rho\varphi\, dV = \frac{1}{2}\sum e_a\varphi_a$$

Но для 1ой частицы $U_1 = \frac{1}{2}e\varphi$ $\quad \varphi = \frac{e}{R}\xrightarrow[R\to 0]{}\infty$

элемент. частица

Значит класс. электродинамика неприменима на малых расст.

Если предпол. что e^- - R_e - радиус, пот. энерг. e^--а $U_e \approx \frac{e^2}{R_e} \simeq m_e c^2$

откуда можно получить границу применимости К.Э.

$$R_e = \frac{e^2}{m_e c^2}$$ это => из самих ур-ний К.Э.

Но, оказывается граница примени. К.Э. на пару порядков выше.

$R_e = 2{,}8\cdot 10^{-13}$ см $\quad \lambda_{C_e} = \frac{h}{mc} = 2{,}4\cdot 10^{-10}$ см — на таких расст. проявл. квантовые эфф.

$\lambda_e = \frac{\hbar}{m_e c}$ $\qquad \frac{\lambda_e}{R_e} = \frac{\hbar}{m_e c}\cdot\frac{m_e c^2}{e^2} = \frac{\hbar c}{e^2} = 137$ постоянная тонкой структуры

Поэтому рассматриваем не U на $U_{взаимод.} = U'$

$U' = \frac{1}{2}\sum e_a \varphi'_a$, φ'_a – потенциал создаваемый всеми ост. зарядами.

$$\varphi'_a = \sum_{b \neq a} \frac{e_b}{R_{ab}}$$

$$U' = \frac{1}{2}\sum_{a \neq b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}}$$

Для $2^х$ зарядов $\quad U'_{12} = \frac{1}{2}\sum = \frac{1}{2}\left(\frac{e_1 e_2}{R_{12}} + \frac{e_2 e_1}{R_{21}}\right) = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}$

ЭМ поле в отсутствии зарядов и токов

Рассм УМ при $\rho = 0$ $\vec{j} = 0$;

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ $\qquad$ ЭМ поле в пр-ве без зарядов и токов $\equiv$ ЭМ волны.

$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ $\qquad \varphi = \int_\infty \frac{\rho}{R} dV \quad \rho = 0 \quad \varphi = 0$

$\mathrm{div}\,\vec{H} = 0$ $\qquad \langle\vec{A}\rangle = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}}{R} dV \quad \vec{j} = 0 \quad \langle\vec{A}\rangle = 0$

Чтобы ЭМ поле $\exists$-вовало с $\rho = 0$ $\vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{E}, \vec{H} = \vec{E}, \vec{H}(t)$

$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi$

$\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$, кулоновская калибровка $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$; $\Delta\varphi = -4\pi\rho$

$\varphi = \int_\infty \frac{\rho}{R} dV$

$\rho = 0 \quad \varphi = 0$

При этих $\overbrace{\text{усл.}}^{\mathrm{div}\,\vec{A} = 0 \;\; \varphi = 0}$ можно записать

$$\begin{cases} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \end{cases}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \mathrm{grad}\,\cancel{\mathrm{div}\vec{A}} - \Delta\vec{A}$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0$$ волновое ур-е
ур-е Д'аламбера

Если взять от послед. ур-е rot:

$$\Delta\vec{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0$$, если взять $-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$ $$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Как зап. волн. ур-е в 4-виде.
II пара УМ зап.

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i = 0$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(g^{il}g^{km}F_{lm}\right) = g^{il}g^{km}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial A_m}{\partial x^l} - \frac{\partial A_l}{\partial x^m}\right) =$$

$$= g^{il}\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^k}A^k - g^{km}\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^m}A^i =$$ потреб. $$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0$$

$$-g^{km}\frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x^m} = 0$$ сумм. $$-g^{00}\frac{\partial^2 A^i}{(\partial x^0)^2} - g^{11}\frac{\partial^2 A^i}{(\partial x^1)^2} - g^{22}\frac{\partial^2 A^i}{(\partial x^2)^2} - g^{33}\frac{\partial^2 A^i}{(\partial x^3)^2} = 0$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A^i = 0$$ — волновое ур-е для 4-потенциала A^i

$$\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \square \qquad \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -g^{km}\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^m} = -\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_k}$$

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial A^0}{\partial x^0} = \mathrm{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$ $$\mathrm{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$ усл. Лоренца

Плоская волна

Все величины зависят от одной коорд. и времени

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0$$ пусть $f(x,t)$ любая из компонент поля

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \; ; \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) f = 0$$

сделаем замену $\xi = t - \frac{x}{c}$ $\quad \eta = t + \frac{x}{c}$, тогда $t = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$

$x = -\frac{c}{2}(\xi - \eta) = \frac{c}{2}(\eta - \xi)$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} - c\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \cancel{\frac{\partial f}{\partial \eta}} \; \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + c\frac{\partial f}{\partial x}\right);$$

В новых переменных ξ и η $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0$

его решение в виде $\quad f(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, или в старых обозн.

$f(t, x) = f_1(t - \frac{x}{c}) + f_2(t + \frac{x}{c})$ Что собой представляют эти решения?

Рассм. $f_1(t - \frac{x}{c})$ $\quad$ решение одно и тоже когда $t - \frac{x}{c} = const.$

$t = 0: \quad f_1(-\frac{x_0}{c}) \qquad t, x: \; f_1(t - \frac{x}{c}) = f_1\left(t - \frac{x - x_0}{c} - \frac{x_0}{c}\right)$

$t - \frac{x - x_0}{c} = 0, \quad x = x_0 + ct$

Все значения поля распространяются в положит. напр оси x со скоростью c.

Аналогично $f_2(t + \frac{x}{c})$ – плоская волна бегущая в отриц. напр. оси x со скор. c

$\vec{A}(t - \frac{x}{c}) \quad \operatorname{div}\vec{A} = 0 \Rightarrow \frac{\partial A_x}{\partial x} = 0$ тогда и подавно $\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} = 0$

$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial A_x}{\partial t} = const.$ но тогда

$E_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}$ – но это не может не зависеть от t.
что не так, тогда $\underline{A_x = 0}$.

Т.о. продольная компонента $\vec{E} = 0 \Rightarrow E$ – поперечн.

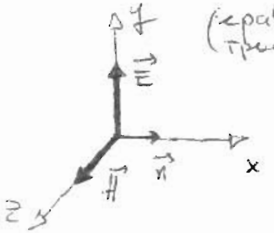
$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}(t-\frac{x}{c})}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}(\xi)}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{1}{c}\vec{A}' \quad \text{, где} \quad \xi = t-\frac{x}{c} \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial \xi} = \vec{A}'$$

$$\vec{H} = \nabla\times\vec{A} = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}\times\vec{A} = \vec{e}_x\times\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \vec{e}_x\times\vec{A}'\left(-\frac{1}{c}\right) = -\frac{1}{c}\vec{n}\cdot\vec{A}'$$

$\vec{n} = \vec{e}_x$ - вектор распростр.

Тогда для плоской волны имеем место:

$$\vec{H} = \vec{n}\times\vec{E}.$$



По величине в кажд. мом. врем. в кажд. т-ке пр-ва

$H = E$ для плоской волны

$$w = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{H^2}{8\pi} = \frac{E^2}{4\pi} = \frac{H^2}{4\pi}.$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E}) = \frac{c}{4\pi}\left\{\vec{n}E^2 - \vec{E}\,\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{E})}_{0 \text{ в плоской волне}}\right\} = cw\vec{n}$$

Откуда => что c - скорость распростр. энергии.

Плотность потока импульса $\vec{p}(t) = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{w}{c}\vec{n}$

$w = cp$ как для частицы с массой равной 0. (фотона)

Монохроматическая волна.

Если кажд. составл. поля явл. простой тригоном. ф-цией времени - монохром. волна

$f \sim \cos\omega t$ $\quad \omega$ - ч-та

В этом сл. распределение в пр-ве будем определять ур-ем

$$\Delta f + \frac{\omega^2}{c^2}f = 0.$$

Часто рассм. плоские монохром. волны

$f \sim \cos\omega t \quad f_1 = f(t - \frac{x}{c})$ тогда пл. монохр. волна

$f(t,x) = f_0 \cos\omega(t - \frac{x}{c})$; $f(x,t) = \mathrm{Re}(f_0 e^{-i\omega(t - \frac{x}{c})})$

$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{-i\omega(t - \frac{x}{c})}$; 1) $x = 0$. $\vec{A}(t) = \vec{A}_0 e^{-i\omega t}$

$t_0 = 0$: $\vec{A}(t_0) = \vec{A}_0 e^{-i\omega t_0}$

$t_0 + t$: $\vec{A}(t_0 + t) = \vec{A}_0 e^{-i\omega(t_0 + t)}$

$A(t_0 + t) = A(t_0)$ когда $\omega t = 2\pi n$, $n = \pm 1, \dots$

$n = 1$: поле повторится за время $T = \frac{2\pi}{\omega}$ - период волны.

2) $t = 0$ x_0 $\vec{A}(x_0) = \vec{A}_0 e^{i\frac{\omega}{c}x_0}$

$x_0 + x$ $\vec{A}(x_0 + x) = \vec{A}_0 e^{i\frac{\omega}{c}(x_0 + x)}$ $A(x_0 + x) = A(x_0)$ при $\frac{\omega}{c}x = 2\pi n$

наименьш. расст. когда поле повторится при $n = 1$.

λ - пространственный период $\qquad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = cT$

Введем волновой вектор $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n}$, тогда $\frac{\omega}{c}x \equiv \frac{\omega}{c}\vec{n}\cdot\vec{r}$

$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$ $\qquad \vec{A}_0$ - комплексная амплит.

$\vec{k}\vec{r} - \omega t$ - фаза волны.

Если $\vec{A}$ в таком виде:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = i\frac{\omega}{c}\vec{A} = ik\vec{A}$$

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A} = \cancel{\nabla} \times \nabla e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \times \vec{A}_0 = i\vec{k} \times \vec{A}$$

$$0 = \mathrm{div}\vec{A} = i\vec{k}\cdot\vec{A} \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{k}$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0 \qquad (-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2})\vec{A} = 0 \qquad \underline{\omega^2 = c^2k^2}$$ - дисперсионное ур-е для плоских волн. в вакууме.

Поляризация плоской монохром. волны

$\vec E(t,\vec r) = \mathrm{Re}\, \vec E_0 e^{i(\vec k\vec r - \omega t)}$ $\vec E_0$ = комплекс. вектор $= \vec b_1 + i\vec b_2$

$\vec E_0^{\,2}$ = компл. число $= |\vec E_0^{\,2}|\cdot e^{-2i\alpha}$ тогда $\vec E_0 = (\vec b_1 + i\vec b_2)e^{-i\alpha}$

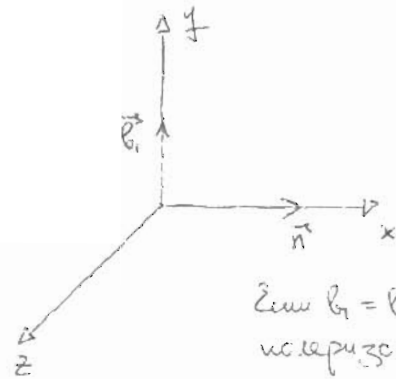
$\vec E_0^{\,2} = |\vec E_0^{\,2}| e^{-2i\alpha} = (\vec b_1 + i\vec b_2)^2 e^{-2i\alpha}$ отсюда следует, что $(\vec b_1 + i\vec b_2)^2$ = веществ.

$(\vec b_1 + i\vec b_2)^2 = |\vec E_0^{\,2}|$ $b_1^2 - b_2^2 + 2i\vec b_1\vec b_2 = |\vec E_0^{\,2}| \Rightarrow \underline{\vec b_1\cdot\vec b_2 = 0}$

$\vec b_1$ и $\vec b_2 \perp \vec k$ ($\mathrm{div}\,\vec E = 0$ зарядов нет)

$\vec E(\vec r,t) = \mathrm{Re}\,(\vec b_1 + i\vec b_2)e^{i(\vec k\vec r - \omega t - \alpha)}$, т.к. $\mathrm{div}\,\vec E = 0$ то это значит.

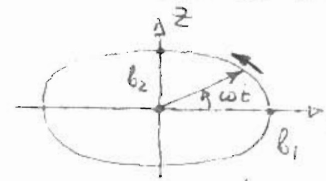
$\mathrm{div}\,\vec E = \vec k\cdot\vec E = 0 \Rightarrow \vec k \perp \vec E \Rightarrow \vec k\vec b_1 = 0$ $\vec k\cdot\vec b_2 = 0$.



$$E_y = b_1\cos(\omega t - \vec k\vec r + \alpha)$$
$$E_z = \pm b_2\sin(\omega t - \vec k\vec r + \alpha)$$

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1$$

В пл-сти YZ конец вектора $\vec E$ описывает эллипс.



Если $b_1 = b_2$ - круговая поляризация

В общ. сл. эллипт. поляр. это суперпоз. $2^х$ волн с разн. амплитуд. одинак. ч-ты во взаимно $\perp$-ых пл-стях.

$\omega t \uparrow$ $\sin(..)\uparrow \Rightarrow$
$\Rightarrow$ против час. стрелки

Эффект Доплера

Введем 4-мерн. волновой вектор

Определим его как $k^i(\frac{\omega}{c}, \vec k)$; $k^i k_i = k^{0\,2} - k^{\alpha\,2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$

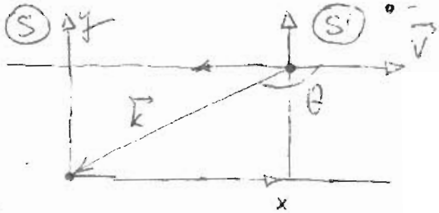
$\vec k^0 = \frac{\omega}{c}$ $\vec k^\alpha = \vec k$

$\underline{k^i k_i = 0}$

$$k_i x^i = k_0 x^0 + k_\alpha x^\alpha = \frac{\omega}{c} ct - \vec k \vec r = \omega t - \vec k \vec r$$

Для плоской монохром волны: $\vec E = \vec E_0 e^{-ik_i x^i}$

S - лаб сист. находимся в $\varnothing$.



В собств системе источник излучает с ч-той $\omega' = \omega_0$ собств ч-та

Преобраз Лоренца

$$k'^0 = \frac{k^0 - \frac{V}{c}k^1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \qquad \frac{\omega_0}{c} = \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \frac{V}{c}\cdot\frac{\omega}{c}\cos\theta\right) \text{ откуда}$$

$k_1 = k_x = k\cos\theta = \frac{\omega}{c}\cos\theta$;

$k'^0 = \frac{\omega_0}{c}$, $k^0 = \frac{\omega}{c}$;

$$\omega = \frac{\omega_0\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-\frac{V}{c}\cos\theta}$$

$\theta \neq \frac{\pi}{2}$, $V \ll c$ $\qquad \omega \simeq \omega_0\left(1+\frac{V}{c}\cos\theta\right)$

1) θ меньше $0<\theta<\pi/2$ $\qquad \omega > \omega_0$ (воспринимаемая ч-та больше)

2) $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ - источник убегает $\qquad \omega<\omega_0$

Если $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\qquad \omega = \omega_0\left(1-\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\right)$ квадратичный эффект Доплера (это получил Лармор)

- Найдем ур-е описывающее ЭМ поле при наличии зарядов и токов

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i \quad (\text{II пара УМ}) \rightarrow \quad g^{il} g^{km} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = g^{il}g^{km}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial A_m}{\partial x^l} - \frac{\partial A_l}{\partial x^m}\right) =$$

$$= g^{il}\frac{\partial^2 A^k}{\partial x^l \partial x^k} - g^{km}\frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x^m} = -\frac{4\pi}{c}j^i,$$ Накладываем условие $\frac{\partial A^k}{\partial x^k}=0$ $\left(\mathrm{div}\vec A + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0\right)$

$\square A^i = -\frac{4\pi}{c} j^i$. Итак если возьмем усл $\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$

получаем ур-е
$$\begin{cases} \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} j^i \\ \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \end{cases}$$

Разобьем все пр-во на элементарн. объем и рассм. поле элемент. заряда в элемент. объеме.

Тогда $\rho(\vec{r},t) = de(t)\,\delta(\vec{R})$ $\quad\vec{R}$ - от элем. объемчика до т-ки набл.

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4de(t)\,\delta(\vec{R})$$

1) $R \neq 0$ $\quad \Delta\varphi_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$ $\quad$ т.к заряд в центре объемчика $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ центр. симметрия

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}R^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial R} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} = 0$$ можно проверить что $\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}R^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial R} = \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}(R\varphi_1)$

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}(R\varphi_1) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(R\varphi_1) = 0$$ $\Rightarrow$ решение в виде плоских волн.

$$R\varphi_1(t,R) = \chi_1\left(t - \frac{R}{c}\right) + \chi_2\left(t + \frac{R}{c}\right)$$

$$\varphi_1 = \frac{\chi_1\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}$$ - так возьмем

2) $R \to 0$ $\Rightarrow$ решение непр.

$$\Delta\varphi_2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} = -4\pi de(t)\,\delta(\vec{R})$$

На границе $\varphi_1 = \varphi_2$, при $R \to 0$ $\frac{1}{R}$ - растет.

тогда $\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial R}\right| \gg \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right|$ $\Rightarrow$ можно выбросить $\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}$

Получим ур-е $\Delta\varphi_z = -4\pi\rho$

$$\varphi = \int \frac{\rho}{R}\, dV \xrightarrow{R\to 0} \varphi_2 = \frac{de(t)}{R}$$

Тогда решение ур-я в виде

$$\varphi = \frac{de(t-\frac{R}{c})}{R} \qquad de(t-\tfrac{R}{c}) = \rho(\vec r, t-\tfrac{R}{c})\, dV$$

Общее решение $\underset{\varphi(\vec r, t)}{\varphi} = \int \frac{\rho(\vec r', t-R/c)}{R}\, dV' + \varphi_0$

$\vec R = \vec r - \vec r'$

Аналогичным образом находим

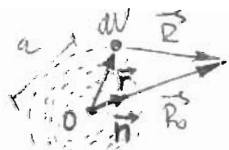
$$\begin{cases} \vec A(\vec r, t) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec j(\vec r', t-R/c)}{R}\, dV' + \vec A_0 \\ \\ \varphi(\vec r, t) = \int \frac{\rho(\vec r', t-R/c)}{R}\, dV' + \varphi_0 \end{cases}$$

На сист. действуют внеш. поле, в рез. взаимод. с зар. и токами $\Rightarrow$ поле зависящее и производящее взаим. и т.д. R. Запаздывающий потенциал – это поле взаимодействия

Больший интерес с поля на больших расст.

$$\varphi = \int \frac{\rho_{t-R/c}}{R}\, dV, \quad \vec A = \frac{1}{c}\int \frac{\vec j_{t-R/c}}{R}\, dV$$

Чтобы можно было говорить о больших расстояниях сист. должна быть локализована



$R_0 \gg a$, $\quad R = \sqrt{(\vec R_0 - \vec r)^2} = \sqrt{R_0^2 - 2\vec r \vec R_0 + r^2} =$

$r \lesssim a$, $\qquad$ 0 (по ср. с R_0)

$$= R_0\sqrt{1 - 2\frac{\vec R_0}{R_0}\frac{\vec r}{R_0}} \simeq R_0\left(1 - \frac{\vec n \vec r}{R_0}\right) = R_0 - \vec n \vec r$$

$R_0 \gg a$
$$\begin{cases}\varphi = \dfrac{1}{R_0}\displaystyle\int \rho_{t-\frac{R}{c}+\frac{\vec n \vec r}{c}}\, dV \\ \vec A = \dfrac{1}{cR_0}\displaystyle\int \vec j_{t-\frac{R}{c}+\frac{\vec n\vec r}{c}}\, dV\end{cases}$$

На больших расст. поле можно рассм. как плоскую волну. Каком это расст.?

$$\varphi = \frac{\chi(t-R/c)}{R}$$

это не плоская волна т.к. амплитуда $= f(R)$

Если бы было $\frac{e^{i(t-\frac{R}{c})}}{R}$, $t \to t+T$, $R \to R+\lambda$, получили бы

$$\frac{e^{i(t+T-\frac{R+\lambda}{c})}}{R+\lambda} = \frac{\chi(t-R/c+\frac{\overset{0}{cT-\lambda}}{c})}{R+\lambda} = \frac{\chi(t-R/c)}{R+\lambda}$$

Если $R\gg\lambda$ $R+\lambda \approx R$ на этих расст. сфер. волну можно рассм. как плоскую.

$R\gg\lambda$ - волновая зона

Для плоской волны: $\vec H = \frac{1}{c}\dot{\vec A}\times\vec n$

$\vec S = \frac{c}{4\pi}H^2\vec n$ $\qquad \vec E = \vec H\times\vec n = \frac{1}{c}(\dot{\vec A}\times\vec n)\times\vec n$

Дифференциальная интенсивность излучения - поток энергии в элемент. телесного угла

$dI = \vec S\, d\vec s$

$dI = \frac{c}{4\pi}\vec H^2 \underbrace{\vec n\cdot\vec n}_{1} R_0^2\, do$

$R\gg\lambda\gg a$ При подст. $\vec A$ в dI R_0^2 сократится

Время запаздывания $\left|\frac{\vec r\vec n}{c}\right| \lesssim \frac{a}{c}$ - им можно пренебречь, если за это время распределение зарядов существ. не изменится

T - время за кот-ое распредел. меняется сущ. образом

$\frac{a}{c} \ll T$ $a \ll cT = \lambda$ т.е. если $\underline{a \ll \lambda}$ то временем з-п. можно пренебречь.

изме. сущ. образом $T \simeq \frac{a}{v}$ если $\underline{v \ll c}$ то

v скор. заряда

$$\vec A = \frac{1}{cR_0}\int j_{t'}\, dV = \frac{1}{cR_0}\sum e\vec v_{t'} = \frac{\dot{\vec d}}{cR_0}$$ (все равно по чем дифф-вать по t' или по t)

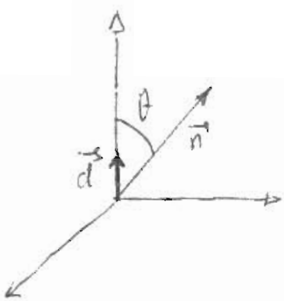
$(t' = t - R/c)$

Дипольное излучение
$$\begin{cases} \vec H = \frac{1}{c}\dot{\vec A}\times\vec n = \frac{1}{c^2R_0}\ddot{\vec d}\times\vec n \\ \vec E = \vec H\times\vec n = \frac{1}{c^2R_0}(\ddot{\vec d}\times\vec n)\times\vec n \end{cases}$$

Какова $dI = ?$

$$dI = \frac{c}{4\pi}\cdot\frac{1}{c^4R_0^2}(\ddot{\vec d}\times\vec n)^2 R_0^2\, do =$$

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3}\ddot{\vec d}^{\,2}\sin^2\theta\, do$$



угловое распределение излучения $\frac{dI}{do} = \frac{1}{4\pi c^3}\ddot{\vec d}^{\,2}\sin^2\theta$

$$I = \frac{\ddot{\vec d}^{\,2}}{4\pi c^3}\int \sin^2\theta\, do = \Big|\, do = \sin\theta\, d\theta\, d\alpha \,\Big| =$$

$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{\vec d}^{\,2} \qquad \vec d = \sum e\vec r \qquad \ddot{\vec d} = \sum e\ddot{\vec r}$$

Если $\vec d = e\vec r$ $I_1 = \frac{2e^2}{3c^2}\dot{\vec v}^{\,2}$, $\underline{v \ll c}$

Если расс. замкн. систему с одинак. $\frac{e_a}{m_a}$, тогда

$$\vec d = \sum e\vec r = \frac{e}{m}\sum m\vec r = \frac{e}{m}\underbrace{\frac{\sum m\vec r}{\sum m}}_{\vec R_ц}\sum m$$

Если $\ddot{\vec R}_ц = 0 \Rightarrow$ дипольное излучение отсутствует.

Квадрупольное и магнитное излучение

Возьмем след. член в разложении для $\vec A$

$$\vec A = \frac{1}{cR_0}\int\left\{\vec j_{t'} + \frac{\vec r\vec n}{c}\frac{\partial \vec j_{t'}}{\partial t'} + \dots\right\} dV =$$

$$= \frac{1}{cR_0}\int \vec j_{t'}\, dV + \frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial}{\partial t'}\int(\vec r\vec n)\vec j_{t'}\, dV =$$

$$= \frac{\dot{\vec d}}{cR_0} + \frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial}{\partial t}\sum e\vec v(\vec r\vec n) =$$

$$\vec v(\vec r\vec n) = \frac12\vec v(\vec r\vec n) + \frac12\frac{\partial}{\partial t}\vec r(\vec r\vec n) - \frac12\vec r(\vec v\vec n) = \frac12\frac{\partial}{\partial t}\vec r(\vec r\vec n) + \frac12(\vec r\times\vec v)\times\vec n$$

$$\vec A = \frac{\dot{\vec d}}{cR_0} + \frac{1}{2c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e\vec r(\vec r\vec n) + \frac{1}{2c^2R_0}\frac{\partial}{\partial t}\sum e(\vec r\times\vec v)\times\vec n$$

Т.к. $\vec H = \frac1c\dot{\vec A}\times\vec n$ сделаем добавку

$$\vec A' = \frac{\dot{\vec d}}{cR_0} + \frac{1}{6c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e(3\vec r(\vec n\cdot\vec r) - r^2\vec n) + \frac{1}{cR_0}\dot{\vec m}\times\vec n$$

$$D_{\alpha\beta} = \sum e(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})$$

$$D_\alpha \equiv D_{\alpha\beta}n_\beta = \sum e(3x_\alpha(\vec n\vec r) - r^2 n_\alpha)$$

$$\vec D = \sum e(3\vec r(\vec n\vec r) - r^2\vec n)$$

$$\vec A' = \frac{\dot{\vec d}}{cR_0} + \frac{\ddot{\vec D}}{6c^2R_0} + \frac{1}{cR_0}\dot{\vec m}\times\vec n; \quad \vec H = \frac{1}{c^2R}\left\{\ddot{\vec d}\times\vec n + \frac{1}{6c}\dddot{\vec D}\times\vec n + (\ddot{\vec m}\times\vec n)\times\vec n\right\}$$

$\vec E = \vec H\times\vec n$ (в волновой зоне)

$$dI = \frac{c}{4\pi}H^2R_0^2\, do = \frac{1}{4\pi c^3}\left\{\ddot{\vec d}\times\vec n + \frac{1}{6c}\dddot{\vec D}\times\vec n + (\ddot{\vec m}\times\vec n)\times\vec n\right\}^2 do$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = I = \frac{1}{c^3}\frac{1}{4\pi}\int\limits_{4\pi} do\left\{\ddot{\vec d}\times\vec n + \frac{1}{6c}\dddot{\vec D}\times\vec n + \vec n(\ddot{\vec m}\vec n) - \ddot{\vec m}\right\}^2 =$$

усреднение под ∫-ого выр-е по единич. сфере.

$$= \frac{1}{c^3}\left\{\langle(\ddot{\vec d}\times\vec n)^2\rangle + \frac{1}{36c^3}\langle(\dddot{\vec D}\times\vec n)^2\rangle + \langle(\ddot{\vec m}\times\vec n)^2\rangle + \frac{1}{3c}\langle(\ddot{\vec d}\times\vec n)(\dddot{\vec D}\times\vec n)\rangle -\right.$$

$$D_\alpha = D_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta$$

$$- \underbrace{\langle 2\ddot{\vec m}(\ddot{\vec d}\times\vec n)\rangle}_{0} - \frac{1}{3c}\langle\ddot{\vec m}(\dddot{\vec D}\times\vec n)\rangle \qquad \sim \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma\rangle = 0.$$

$$\ddot m_\alpha e_{\alpha\beta\gamma}\dddot D_{\beta\nu}\langle n_\nu n_\gamma\rangle = \frac{1}{3}\ddot m_\alpha e_{\alpha\beta\gamma}\dddot D_{\beta\nu}\delta_{\nu\gamma} =$$

$$= \frac{1}{3}\ddot m_\alpha \underbrace{e_{\alpha\beta\gamma}}_{A}\underbrace{\dddot D_{\beta\gamma}}_{S} = 0$$

$$A\cdot S = 0$$

$$\langle(\ddot{\vec d}\times\vec n)^2\rangle = \langle(\ddot{\vec d})^2\rangle - \langle(\vec n\ddot{\vec d})^2\rangle$$

$$\langle(\vec n\ddot{\vec d})^2\rangle = \langle n_\alpha \ddot d_\alpha n_\beta \ddot d_\beta\rangle = \ddot d_\alpha \ddot d_\beta \underbrace{\langle n_\alpha n_\beta\rangle}_{\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}} = \frac{1}{3}\ddot d^2$$

$$\langle(\ddot{\vec d}\times\vec n)^2\rangle = \frac{2}{3}\ddot d^2 \;;$$

$$\langle(\ddot{\vec m}\times\vec n)^2\rangle = \frac{2}{3}\ddot m^2 \;; \quad \langle(\dddot{\vec D}\times\vec n)^2\rangle = \dddot{\vec D}^2 - \langle(\vec n\dddot{\vec D})^2\rangle$$

$$\langle(\dddot{\vec D})^2\rangle = \langle\dddot D_\alpha \dddot D_\alpha\rangle = \dddot D_{\alpha\mu}\dddot D_{\alpha\nu}\underbrace{\langle n_\mu n_\nu\rangle}_{\frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}} = \frac{1}{3}\dddot D_{\alpha\beta}^2$$

$$\langle(\vec n\dddot{\vec D})^2\rangle = \langle n_\alpha \dddot D_\alpha n_\beta \dddot D_\beta\rangle = \dddot D_{\alpha\mu}\dddot D_{\beta\nu}\langle n_\alpha n_\beta n_\mu n_\nu\rangle$$

После $\langle n_\alpha n_\beta n_\mu n_\nu\rangle$ - постоянный симм. по всем индексам.

симм тензор 4-ого ранга симм. по всем индексам.

из симметр. тензоров мы знаем только δ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \langle\ldots\rangle = b(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}) \qquad \delta_{\alpha\mu}\cdot\delta_{\mu\alpha} = \delta_{\alpha\alpha}$$

$\left.\begin{matrix}\alpha=\beta\\ \mu=\nu\end{matrix}\right\}$ и просум по α и μ $\quad 1 = b(\delta_{\alpha\alpha}\delta_{\mu\mu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\alpha\mu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\alpha\mu})$

$$1 = b(3\cdot 3 + 2\cdot 3) \qquad b = 1/15.$$

$$\dddot{D}_{\alpha\mu}\dddot{D}_{\beta\nu}\langle n_\alpha n_\beta n_\mu n_\nu\rangle = \frac{1}{15}\dddot{D}_{\alpha\mu}\dddot{D}_{\beta\nu}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}+\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}+\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}) =$$

$$= \frac{1}{15}\Big(\underbrace{\dddot{D}_{\alpha\mu}\dddot{D}_{\alpha\mu}}_{\mu\to\beta} + \underbrace{\dddot{D}_{\alpha\alpha}}_{=0}\dddot{D}_{\beta\beta} + \underbrace{\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\beta\alpha}}_{\dddot{D}_{\alpha\beta}}\Big) = \frac{2}{15}\dddot{D}_{\alpha\beta}^2$$

$$\langle(\dddot{\vec D}\times\vec n)^2\rangle = \frac{1}{3}\dddot{D}_{\alpha\beta}^2 - \frac{2}{15}\dddot{D}_{\alpha\beta}^2 = \frac{1}{5}\dddot{D}_{\alpha\beta}^2$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \equiv I = \frac{2}{3c^2}\ddot{\vec d}^{\,2} + \frac{\dddot{D}_{\alpha\beta}^2}{180c^5} + \frac{2}{3c^3}\ddot{\vec m}^{\,2}$$

основной вклад.

(в волновой зоне)

$\vec m = \frac{1}{2c}\sum e\vec r\times\vec v \sim \frac{v}{c}$

$v \ll c$ $(a \ll \lambda)$ $R \gg \lambda$

Если $\frac{e_a}{m_a} = const$ ~~дипольный момент магнитный~~ $= 0$.

$\vec m = \frac{e}{2mc}\vec M$, $\vec M$ замкн. сист. $= Const$.

$\ddot{\vec M} = 0$ $\ddot{\vec m} = 0$.

Рассм. излучение группы частиц движ-щих с релятив. скор. Перейдем в сопутствующую сист. отс. (преобраз. Лоренца

Рассм. одну релятив. ч. движ. $\vec v$ близка к c.

$$\frac{d\mathcal{E}'}{dt'} \equiv I' = \frac{2e^2}{3c^3}(\dot{\vec v}')^2$$

В лаб. сист. $d\mathcal{E} = \dfrac{d\mathcal{E}' + \vec v\cdot d\vec p'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ при дипольном излучении $d\vec p' = 0$.

изменение импульса в ед. врем. в объеме

$$= \oint T_{\alpha\beta}n_\beta ds = \frac{1}{4\pi}\oint\Big(-E_\alpha \overset{0}{E_\beta} - H_\alpha \overset{0}{H_\beta} + \frac{E^2+H^2}{2}\delta_{\alpha\beta}\Big)n_\beta ds =$$

В волн. зоне E, H - плоские волны $\vec E, \vec H\cdot\vec n = 0$ $ds = R_0^2 do$

При дипольном излучении $H^2 = \frac{1}{cR_0}(\ddot{\vec{d}} \times \vec{n})^2$

$$\ldots = \frac{1}{c^2}\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} do\,(\ddot{\vec{d}} \times \vec{n})^2 n_\alpha = \frac{1}{c^2}\langle(\ddot{\vec{d}} \times \vec{n})^2 n_\alpha\rangle = 0 \Rightarrow d\vec{p}\,' = 0$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt} = \frac{d\varepsilon'}{dt'} = I' \qquad I = I'$$

дипольное излучение одинаково во всех инерц. сист

$$d\vec{p} = \frac{\overset{0}{d\vec{p}\,'} + \frac{\vec{v}}{c^2}d\varepsilon'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{v}}{c^2}\frac{d\varepsilon'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt} = \frac{\vec{v}}{c^2}\frac{d\varepsilon'}{dt'} = \frac{\vec{v}}{c^2}\frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\frac{du^i}{ds}\frac{du_i}{ds} = -\frac{(\dot{\vec{v}})^2 - \frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\dot{\vec{v}})^2}{c^4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}$$ в лабор. сист.

в сопутс. сист $\left.\begin{matrix}\vec{v}\,' = 0\\ \dot{\vec{v}}\,' \neq 0\end{matrix}\right\}$ (вообще $s = s'$)

$$\frac{du'^i}{ds'}\frac{du'_i}{ds'} = -\frac{(\dot{\vec{v}})^2}{c^4}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3}\left(-c^4\frac{du'^i}{ds}\frac{du'_i}{ds'}\right) = -\frac{2e^2c}{3}\underset{\text{в Λ-сист.}}{\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}}$$

В Λ-сист:

$$\Delta\varepsilon = \frac{2e^2}{3c^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\dot{\vec{v}})^2 - \frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\dot{\vec{v}})^2}{(1-v^2/c^2)^3}dt$$

эти ф-лы неудобны для экс. т.к. надо мерить $\vec{v}$ и $\dot{\vec{v}}$. В экс. задают внешние поле ⇒ получим ф-лу выражающую ч-з поле

$$\Delta\varepsilon = -\frac{2e^2}{3\cancel{c^3}}c\int\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}dt = -\frac{2e^2}{3\cancel{c^3}}c\int\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}\frac{1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\underbrace{c\sqrt{1-v^2/c^2}\,dt}_{ds} =$$

$$\Delta\varepsilon = -\frac{2e^2}{3\cancel{c}}\int\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}u^0 ds$$

$$\Delta p^\alpha = -\frac{2e^2}{3c}\int \frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}\frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt = -\frac{2e^2}{3c}\int\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}u^\alpha ds$$

Р-лы для $\Delta\mathcal{E}$ и Δp^α можно объединить.

$$\Delta p^i = -\frac{2e^2}{3c}\int\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}u^i ds = -\frac{2e^2}{3c}\int\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}dx^i$$

$$mc\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k = \frac{dp^i}{ds}$$

$$\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds} = \frac{1}{m^2c^2}\frac{dp^k}{ds}\frac{dp_k}{ds} = \frac{1}{m^2c^2}\left(\frac{dp^\alpha}{ds}\frac{dp_\alpha}{ds}+\frac{dp^0}{ds}\frac{dp_0}{ds}\right) =$$

$$= \frac{1}{m^2c^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\left\{-\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathcal{E}_k}{dt}\right)^2\right\} = \frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = e\vec{E}\vec{v} =$$

$$= \frac{1}{m^2c^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\left\{e^2\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{H}\right)^2-\frac{e^2}{c^2}(\vec{v}\vec{E})^2\right\}$$

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{2e^4}{3m^2c^3}\int\frac{(\vec{E}+1/c\,\vec{v}\times\vec{H})^2-1/c^2(\vec{v}\vec{E})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Излучение быстродвиж. частицы.

$$\Delta\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} I\,dt \qquad \frac{d\mathcal{E}}{dt} \equiv I = \frac{2e^4}{3m^2c^3}\frac{(\vec{E}+\frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{H})^2-\frac{1}{c^2}(\vec{v}\vec{E})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

При $v \to c$ $\frac{d\mathcal{E}}{dt} \sim$ (энергия частицы)^2 – циклич. ускор.

Сл. когда $\vec{E}\parallel\vec{v}$, $\vec{H}=0$ $\quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = const$ – линейный ускор.

Имеет место влияние излучения на движение излучающих частиц.
Излучение тормозит частицу (излучающую) - лучистое трение
Выделим - a-ую частицу из системы частиц. Будем рассм. движ. частицы под действием собств. поля. (для случая $v \ll c$).

$$L_a = \frac{m_a v_a^2}{2} - e_a\varphi + \frac{e_a}{c}\vec{v}_a\vec{A}$$; $\varphi, \vec{A}$ - создаваемые всеми частицами ~~кроме~~ в той т-ке где нах-ся a-ая

$$\varphi = \int \frac{\rho_{t-R/c}}{R}dV, \quad \vec{A} = \frac{1}{c}\int\frac{\vec{j}_{t-R/c}}{R}dV$$

$$\varphi = \int dV\frac{1}{R}\left\{\rho - \frac{R}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{R^2}{2c^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} - \frac{R^3}{6c^3}\frac{\partial^3\rho}{\partial t^3} + \ldots\right\}; \quad \vec{A} = \frac{1}{c}\int dV\frac{1}{R}\left\{\vec{j} - \frac{R}{c}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} + \ldots\right\}$$

R: $dV \to$ т-ка набл. $R \neq f(t)$

$\sim \frac{\partial}{\partial t}\int\rho dV = 0$ (полный заряд)

1) $$\varphi_a = \sum_{b\neq a}\frac{e_b}{R_{ab}}; \quad L_a = \frac{m_a v_a^2}{2} - \sum_{b\neq a}\frac{e_a e_b}{R_{ab}}$$

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - \sum_a \frac{e_a e_b}{R_{ab}}$$

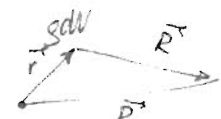
2) если оставить слагаемое $\sim \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ L будет ф-цией скоростей и взаимных расстояний.
3) если оставить $\sim 1/c^3$ В L появл. член сравнимый по энергии, с дипольным излучением заряда. Т.е. появл. члены $\sim$ ускорению заряда

$$\varphi^{(3)} = -\frac{1}{6c^3}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int\rho R^2 dV; \quad \varphi' = \varphi^{(3)} - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$$

Подберем f т.о. чтобы $\varphi' = 0$

$$\vec{A}^{(1)} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\vec{j}dV; \quad -\frac{1}{6c^3}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int\rho R^2 dV - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} = \varphi'$$

$$f = -\frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\rho R^2 dV =$$



$$= -\frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e(\vec{R}_0 - \vec{r}(t))^2$$

$\vec{R} = \vec{R}_0 - \vec{r}$ $\quad \rho = \sum e\,\delta(\vec{r} - \vec{r}(t))$

$$\vec{A}' = \vec{A}^{(1)} + \operatorname{grad} f = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\vec{j}dV - \frac{1}{3c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\rho\vec{R}dV =$$

$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\sum e\vec{v} - \frac{1}{3c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e(\vec{R}_0 - \vec{r}) = -\frac{1}{c^2}\sum e\ddot{\vec{r}} + \frac{1}{3c^2}\sum e\ddot{\vec{r}} = -\frac{2}{3c^2}\ddot{\vec{d}}$$

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}' = 0; \quad \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\vec{d}}$$

$$\vec{f} = e\vec{E} = \frac{2e}{3c^3}\dddot{\vec{d}}$$ сила лучистого трения

Мощность = $\vec f\cdot\vec v$

$$\langle \sum \vec f \vec v\rangle = \frac{2}{3c^3}\overline{\dddot{\vec d}\sum e\vec v} = \frac{2}{3c^2}\langle \dddot{\vec d}\,\dot{\vec d}\rangle = \langle \cancel{\frac{d}{dt}\frac{2}{3c^3}\ddot{\vec d}\,\dot{\vec d}} \rangle - \frac{2}{3c^3}(\ddot{\vec d})^2 < 0$$

$$\cancel{\frac{d}{dt}\frac{2}{3c^3}\ddot{\vec d}\,\dot{\vec d}} \to 0$$

Сила лучистого трения действ на 1-заряд

$$\vec f_1 = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec v}\ ; \quad m\dot{\vec v} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec v}, \quad \ddot{\vec v} = \frac{3mc^3}{2e^2}\dot{\vec v}$$

$$\dot{\vec v} = \dot{\vec v}_0 e^{\frac{3mc^3}{2e^2}t}$$ – это справедливо когда сила луч тр. должна быть малой по ср с внешними силами.

Когда же это выполняется?

$$m\dot{\vec v} = e\vec E + \frac{e}{c}\vec v\times\vec H + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec v}$$ будем считать

Будем реш методом последовательных $\approx$-ий.

$$\ddot{\vec v} = \frac{e}{m}\dot{\vec E} + \frac{e}{mc}\dot{\vec v}\times\vec H + \frac{e}{mc}\vec v\times\dot{\vec H} \to 0$$ реш в мгновенно сопутствующей системе $\vec v = 0$, $\dot{\vec v}\neq 0$.

$\dot{\vec v} = \frac{e}{m}\vec E$ (в этой системе).

$$\ddot{\vec v} = \frac{e}{m}\dot{\vec E} + \frac{e^2}{m^2c}\vec E\times\vec H \qquad \vec f = \frac{2e^3}{3mc^3}\dot{\vec E} + \frac{2e^4}{3m^2c^4}\vec E\times\vec H + \dots$$

$$|\vec f| \ll |e\vec E|\ ; \quad \frac{e^3}{mc^3}\omega E \ll eE\ ; \quad \frac{e^2}{mc^2}\frac{\omega}{c} \ll 1 \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

1) $\frac{r_0}{\lambda} \ll 1$ условие применимости кл. электр.

2) $\frac{e^4}{m^2c^4}EH \ll eE$

$$H \ll \frac{m^2c^4}{e^3}\ ; \quad \frac{eH}{mc} \ll \frac{mc^3}{e^2}$$

$$\omega_H \ll \frac{mc^3}{e^2}\ ; \quad \frac{c}{\omega_H} \gg \frac{e^2}{mc^2} \quad \lambda_H \gg r_0$$

Это можно получить по-др.

$$\hbar\omega_H \ll \frac{\hbar c}{e^2}mc^2 \qquad \frac{\hbar\omega_H}{mc^2} \ll \frac{\hbar c}{e^2} = 137$$

Однако кв эфф. проявл. уже когда $\hbar\omega_H \sim mc^2$

Класс электродинамика применима $\hbar\omega_H \ll mc^2$

Учтём силу лучистого трения при колебании осциллятора.
Рассм. линейный гармонич. осциллятор

$m\ddot{x} = -kx + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{x}$; $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{x}$ методом последовательных приближений получим

$\dddot{x} = -\omega_0^2 \dot{x}$; $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$;

$$\gamma = \frac{2e^2}{3mc^3}\omega_0^2 = \frac{4\pi}{3}\frac{e^2}{mc^2}\frac{\omega_0}{2\pi c}\omega_0 = \frac{4\pi}{3}\underbrace{r_0\lambda_0}_{\ll 1}\omega_0 , \quad \gamma \ll \omega_0$$

$x(t) = x_0 e^{pt}$

$(p^2 + \gamma p + \omega_0^2)x_0 = 0$ $p_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$, $\frac{\gamma^2}{4} \to 0$, $\gamma \ll \omega_0$

$x(t) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t - i\omega_0 t}$

средняя энергия $\langle w \rangle = m\left(\langle \dot{x}^2 \rangle + \omega_0^2 \langle x^2 \rangle\right) = w_0 e^{-\gamma t} + \dots$ $\tau = \frac{1}{\gamma}$ время жизни осциллятора.

Ширина излучения осциллятора.

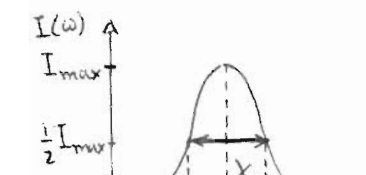
$\vec{E} \sim \ddot{\vec{d}}$ $\vec{E}(t) = \begin{cases} \vec{E}_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t - i\omega_0 t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

$$\vec{E}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega , \quad \vec{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) e^{i\omega t} dt =$$

$$= \frac{\vec{E}_0}{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{i(\omega - \omega_0)t - \frac{\gamma}{2}t} = \frac{E_0}{2\pi}\frac{1}{-i(\omega - \omega_0) + \frac{\gamma}{2}} ; \quad I(\omega) \sim |\vec{E}(\omega)|^2$$

$$I(\omega) = \frac{\gamma}{2\pi} I_0 \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$$

причём I_0 выбрана так, чтобы $\int I(\omega)\, d\omega = I_0$



В т-ках где $\omega - \omega_0 = \pm\frac{\gamma}{2}$ $I = \frac{1}{2} I_{max}$

$\gamma = \frac{1}{\tau}$, $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ $|\Delta\lambda| = \frac{2\pi c}{\omega_0^2}\Delta\omega = \frac{2\pi c}{\omega_0^2}\gamma =$

$= \frac{2\pi c}{\omega_0^2}\cdot\frac{2e^2}{3mc^3}\omega_0^2 = \frac{4\pi}{3} r_0 = 1{,}18 \cdot 10^{-4}$ Å

Мы наблюдаем ширину не меньше чем ↗.

Магнитно-тормозное излучение.

Если нет излучения, то движ. по окр. в $\vec{H}$ длится ∞-долго.

Ранее вычислили

$$I=\frac{2e^4}{3m^2c^3}\cdot\frac{\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{H}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\vec{v}\vec{E}\right)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Если $\vec{E}=0$, $\vec{H}\neq 0$

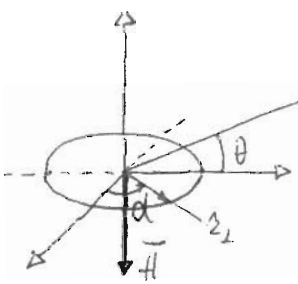
излучение заряда движущегося по орбите в $\vec{H}$

$$I=\frac{2e^4v^2H^2}{3m^2c^5\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\sim p_\perp^2;$$

B магн. поле.

$$\omega_H=\frac{ecH}{\mathcal{E}_k}$$

$$r_\perp=\frac{cp_\perp}{eH}\Leftrightarrow\frac{v_\perp}{\omega_H}$$



$\vec{n}$ - направление на т-ку набл.

Если излуч. усреднить по периоду $T=\frac{2\pi}{\omega_H}$ (исчезнет зав-сть от α), тогда:

$$A=\frac{(d\bar{I}/do)_{\theta=0}}{(d\bar{I}/do)_{\theta=\pi/2}}=\frac{4+\frac{v^2}{c^2}}{8\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{5/2}}$$

$v\ll c$: $A\sim\frac{1}{2}$

$v\sim c$: $A\to\infty$ $\quad\Delta\theta\sim\sqrt{1-v^2/c^2}$ - излучение в основном сосред. в пл-сти орбиты.

Рассеяние света на заряженных частицах.

Под действием поля волны заряды приходят в движение, они начинают двиг. с ускорением, начинают излучать во всех направлениях. Этот процесс удобно хар-зовать сечением рассеяния.

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{\overline{S_0}}$$ $[dI] = \frac{эрг}{сек}$

$[S_0] =$

$\overline{dI}$ - усредненная по периоду интенс. излучения в элемент. телесного угла

S_0 - усред. по периоду плотность потока

Пусть на единичный заряд падает лин. поляризованная волна

v - скор приобретаемая частицей под действием поля $\ll c$; ур-е движ частицы.

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H}$$

Поле: $\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E}_0\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha)$

$|\vec{k}\vec{r}| \sim \frac{\omega}{c}vt = \frac{v}{c}\cdot\omega t \ll \omega t \Rightarrow \vec{k}\vec{r}$ - можно выбросить по срав с ωt.

т.е колебание в р-не начала коорд.

В плоской волне $|\vec{H}| \sim |\vec{E}| \Rightarrow$ можно выбросить $\frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H}$ по ср. с $e\vec{E}$.

Т.е получим $\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{m}\vec{E}$

dI для дипольного излучение $= dI = \frac{1}{4\pi c^3}(\ddot{\vec{d}}\times\vec{n})^2 do$ $\quad \ddot{\vec{d}} = e\ddot{\vec{r}} = \frac{e^2}{m}\vec{E}$.

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3}\ddot{d}^2\sin^2\theta\, do = \frac{e^4E^2}{4\pi m^2c^3}\sin^2\theta\, do = \frac{cE^2}{4\pi}\left(\frac{e}{mc^2}\right)^2\sin^2\theta\, do$$

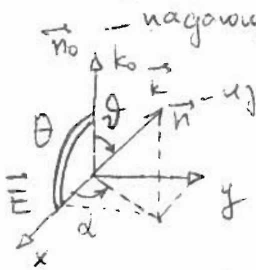
θ - угол м-ду $\vec{n}$ и $\vec{E}$; S_0 для плоской волны $S_0 = cW_0 = \frac{cE^2}{4\pi}$.

Т.о $\quad d\sigma = r_0^2\sin^2\theta\, do \quad$ r_0 - класс. радиус частицы

Диф². сечение расс. лин. поляр волны на неподвижном (вначале) заряде не зависит от ч-ты падающей волны.

Полное сечение рассеяния $\sigma = r_0^2 \int\limits_{4\pi} \sin^2\theta \, do = \frac{8\pi}{3} r_0^3$; ф-ла Томсона

Какое будет сечение если падает естеств. свет (неполяриз.)?



Для естеств. света $\vec{k}_0$ одно и то же, а $\vec{E}$ имеем равновероятн. напр.

Надо усреднить по углу α, т.е.

надо найти $\langle \sin^2\theta \rangle$

с одн стороны: $\vec{n}\vec{E} = E\cos\theta$; с др. $\vec{n}\vec{E} = E_x n_x = E\sin\vartheta\cos\alpha$

приравняв $\cos\theta = \sin\vartheta\cos\alpha$

$$\langle \sin^2\theta \rangle = 1 - \langle \cos^2\theta \rangle = 1 - \sin^2\vartheta \cdot \langle \cos^2\alpha \rangle = 1 - \sin^2\vartheta \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{2 - (1 - \cos^2\vartheta)\right\} = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\vartheta).$$

- Рассеяние линейно поляриз. волны заряженным осциллятором.

$$\langle dI \rangle = \frac{1}{4\pi c^3} \langle (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n})^2 \rangle \, do$$

$v \ll c$

ур-е движ.: $m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} + e\vec{E} + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\vec{r}}$

(сила лучистого трения)

Т.к. падает лин.поляр. волна, тогда см. ранее действием $\vec{H}$ пренебрег, а $\vec{E} = \vec{E}(t)$.

$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0 \vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\vec{r}}$$

Методом послед. ≈-ий: $\dddot{\vec{r}} = -\omega_0 \dot{\vec{r}}$ и подставим.

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0 \vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$, ищем решение в виде $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}$

$$\vec{r}_0 = \frac{\frac{e}{m}\vec{E}}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}, \quad \gamma = \frac{2e^2}{3c^3 m}\omega_0^2 \ll \omega_0.$$

тогда $\vec{r}(t) = \dfrac{\frac{e}{m}\vec{E}(t)}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}$; $\vec{d} = e\vec{r} = \dfrac{\frac{e^2}{m}\vec{E}(t)}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}$

$$\ddot{\vec{d}} = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}\cdot\frac{e^2}{m}\vec{E}(t)$$

$$\langle dI\rangle = \frac{1}{4\pi c^3}\langle\ddot{\vec{d}}^2\rangle \sin^2\theta\, do$$

$A(t) = A_0 e^{-i\omega t}$ $\quad B(t) = B_0 e^{-i\omega t}$ $\quad \langle A(t)B(t)\rangle = ?$ в этом случае, надо сразу брать $\langle \mathrm{Re}\,A(t)\cdot \mathrm{Re}\,B(t)\rangle = \left\langle \frac{1}{4}(A_0e^{-i\omega t} + A_0^* e^{i\omega t})(B_0 e^{-i\omega t} + B_0^* e^{i\omega t})\right\rangle_{T=\frac{2\pi}{\omega}} =$

$$= \frac{1}{4}\left\langle\left(A_0B_0e^{-2i\omega t} + A_0B_0^* + A_0^*B_0 + A_0^*B_0^*e^{2i\omega t}\right)\right\rangle_{T=\frac{2\pi}{\omega}} =$$

после усредн. (периодич. величина) $=0$ $\qquad$ 0

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}(A_0B_0^*) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\langle A(t)\cdot B^*(t)\rangle$$

Если $A = B$: $\langle AB\rangle = \langle A^2\rangle = \frac{1}{2}|A|^2$

$$\langle dI\rangle = \frac{1}{4\pi c^3}\cdot\frac{1}{2}|\ddot{\vec{d}}|^2\sin^2\theta\, do = \frac{|\vec{E}|^2}{8\pi c^3}\,\frac{e^4}{m^2}\,\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}\sin^2\theta\, do$$

$$\langle S_0\rangle = \frac{c}{4\pi}\langle\vec{E}^2\rangle = \frac{c}{8\pi}|\vec{E}|^2$$

$$d\sigma = r_0^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}\sin^2\theta\, do\ ; \quad \sigma = \frac{8\pi}{3}r_0^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}$$

1) $\omega \ll \omega_0$

$$\sigma = r_0^2 \frac{8\pi}{3} \frac{\omega^4}{\omega^4}$$ Релеевское рассеяние.

2) $\omega \gg \omega_0$ $\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2$ Томсоновское рассеяние

≈ рассеяние мин. поперечн волны на неподвижном заряде

3) $\omega \simeq \omega_0$ $\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \cdot \frac{\omega^2}{\gamma^2}$

$\frac{\omega^2}{\gamma^2} \gg 1$ резонансное рассеяние.

• Геометрическая оптика

Плоская волна $f = f_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$, реальные волны $f(t,\vec{r}) = a(t,\vec{r}) e^{i\psi(t,\vec{r})}$.

Иногда реальную волну в некот-ых участках пр-ва можно расс-ть как плоскую.

Для малых времени и участков пр-ва

$$\psi(t,r) = \psi_0 + t\frac{\partial\psi}{\partial t} + r\frac{\partial\psi}{\partial r} + \ldots$$

Если $a(t,\vec{r})$ мало меняется на расст. $\simeq \lambda$,

$\lambda \frac{\partial a}{\partial x}$ - изменение амплитуды на длине волны. $\left|\lambda \frac{\partial a}{\partial x}\right| \ll a$.

Пусть L - длина на кот-ой меняются параметры. $\lambda \cdot \frac{a}{L} \ll a$ $\boxed{\lambda \ll L}$

$$f = a e^{i(\psi_0 + t\frac{\partial\psi}{\partial t} + \vec{r}\,\mathrm{grad}\,\psi)}$$

$$\vec{k} = \mathrm{grad}\,\psi \qquad \omega = -\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

ψ - эйконал. Расстояния на кот-ых волну можно считать плоской $\lambda \ll x \ll L$.

Это возможение тем лучше чем ~~больше~~ меньше длина волны.

Плоская волна: поверхности постоянной фазы - пл-сти

 ; реальная волна 

Линия нормалей к волновым поверхностям наз-ся лучом.

Осн задача определение ур-я эйконала (а потом и его самого).

Ур-е плоской волны в 4-виде:

$$f = a e^{-ik_i x^i}, \quad k_i k^i = 0, \quad g^{ik} k_i k_k = 0$$

$k_i = -\frac{\partial\psi}{\partial x^i}$, действительно: $k_0 = -\frac{\partial\psi}{\partial x^0}$ $\quad \frac{\omega}{c} = -\frac{\partial\psi}{c\,\partial t}$ $\quad \omega = -\frac{\partial\psi}{\partial t}$

$$k^\alpha = -k_\alpha = \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}, \quad \vec{k} = \mathrm{grad}\,\psi$$

$g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} = 0$ ур-е эйконала в 4-виде.

Др. способ. Надо заметить что эйконал - большая величина

$$\psi(x+\lambda) = \psi(x) + \lambda\frac{\partial\psi}{\partial x} + \dots = \psi(x) + 2\pi$$

$$\lambda\frac{\partial\psi}{\partial x} = 2\pi \quad \psi\frac{\lambda}{L} = 2\pi \quad \psi \sim 2\pi\frac{L}{\lambda} \gg 1.$$

Можно из волнового ур-я получить ур-е эйконала.

$g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} = 0$ $\quad f = a e^{i\psi}$; $\quad g^{ik}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} = 0$;

$$\frac{\partial f}{\partial x^k} = \left(\frac{\partial a}{\partial x^k} + ia\frac{\partial\psi}{\partial x^k}\right)e^{i\psi}$$

$$g^{ik}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} = g^{ik}\left\{\frac{\partial^2 a}{\partial x^i \partial x^k} + i\frac{\partial a}{\partial x^k}\frac{\partial \psi}{\partial x^k} + ia\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^k} + \left(\frac{\partial a}{\partial x^k} + ia\frac{\partial \psi}{\partial x^k}\right) i\frac{\partial \psi}{\partial x^i}\right\} e^{i\psi} = 0$$

Учитывая то что ψ - большая величина получим ур-е эйконала

Оптико-механическая аналогия

Механика	Оптика
$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2c^2 = 0$	$g^{ik}\frac{\partial \psi}{\partial x^i}\frac{\partial \psi}{\partial x^k} = 0$
$\vec{p} = \mathrm{grad}\, S$, $\mathcal{E} = -\frac{\partial S}{\partial t}$	$\vec{k} = \mathrm{grad}\,\psi$, $\omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}$
$\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}}$	$\vec{v} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}$, $\dot{\vec{k}} = -\frac{\partial \omega}{\partial \vec{r}}$
$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{r}}$	В вакууме $\vec{v} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = c\frac{\vec{k}}{k}$; $\omega = ck$; $\dot{\vec{k}} = 0$

$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r},t)e^{i\psi(\vec{r},t)}$. Если мы рассматр. поле в данной т-ке ~~простр~~ пр-ва

$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r},t)e^{-i\omega_0 t}$ - какова ее степень монохроматичности.

$$\vec{E}(t) = \int \vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

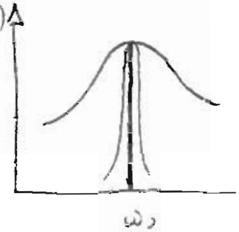
$$\vec{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}(t)e^{i\omega t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}_0(t)e^{i(\omega-\omega_0)t}dt$$

$$\vec{E}_0(t) = \vec{E}_0 = const \qquad \vec{E}(\omega) = E_0\delta(\omega-\omega_0).$$

Если $\vec{E}_0 \neq f(t)$ волна монохроматическая.

Если $\Delta t \gg$ время изменения фазы $= \frac{1}{|\omega-\omega_0|}$ медленно меняющаяся амплитуда.

$\Delta t \gtrsim \frac{1}{|\omega-\omega_0|}$ – в амплитуду дают вклад кроме ω_0 и другие Фурье-компоненты



Т.е. критерий монохроматичности.

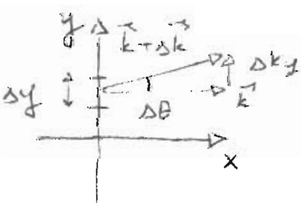
$$\Delta t \Delta\omega \gtrsim 1.$$

Фиксируем $t = const$ $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r})e^{i\vec{k}\vec{r}}$

$$\begin{cases} \Delta k_x \Delta x \gtrsim 1 \\ \Delta k_y \Delta y \gtrsim 1 \\ \Delta k_z \Delta z \gtrsim 1 \end{cases}$$

* Пусть в теч. Δt работ. источник

Δt разброс частот $\Delta\omega \gtrsim \frac{1}{\Delta t}$;



$\Delta\theta \cdot k \gtrsim \frac{1}{\Delta y}$ $\Delta\theta \gtrsim \frac{1}{k\Delta y} \sim \frac{\lambda}{\Delta y}$

$\lambda < \Delta y$ – геометрич. оптика

$\gtrsim$ – нет

$\Delta y \gtrsim \frac{1}{k\Delta\theta} = \frac{\lambda}{\Delta\theta}$ изображение не точка, а протяженное

• Дифракционные явления.

Дифр. явл. связаны с конечностью длины волны.
Чем больше λ тем сильнее проявл. дифр. явления.

Задать источники, экраны, надо найти интенсивность в $\forall$ т-ке.

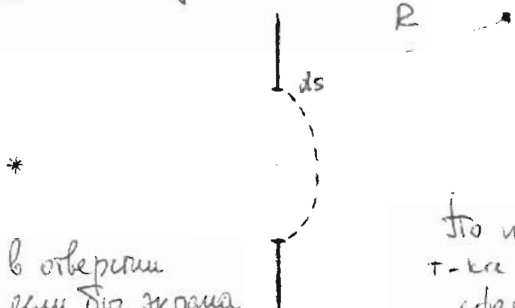
Будем расм. слабые диф. явл. Все характерные $\gg \lambda$ размеры (L).

Положим, что

P т-ка набл.

дает наибольший вклад в интенсивность

еще учитываем



$U_p \sim U$

$U_p \sim$ кол-ву света проходящего ч-з dS т.е.

$U_p \sim dS_n$

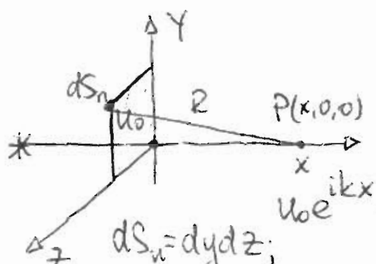
U - поле в отверстии (как если бы экрана не было)

По принципу Гюйгенса каждая т-ка нашей пов-сти будет источником сферич. волн.

Итого $U_p \sim U \cdot dS_n \frac{e^{ikR}}{R}$

$$U_p = a\int \frac{u e^{ikR}}{R}\, dS_n \qquad a = ?$$

Макс вклад - лучи лежащие ближе к O.



$$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = x\sqrt{1+\frac{y^2+z^2}{x^2}}$$

$dS_n = dy\,dz$; $U_0 e^{ikx}$ - без экрана; при $x \gg y, z$

$$R \approx x + \frac{y^2+z^2}{2x^2}$$

$$U_p = aU_0 e^{ikx}\frac{1}{x}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{y^2}{2x}}\,dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{z^2}{2x}}\,dz$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{y^2}{2x}}\,dy = \left\| y\sqrt{\frac{k}{2x}} = \xi \right\| = \sqrt{\frac{2x}{k}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^2}\,d\xi = \sqrt{\frac{2x}{k}}\left\{\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\xi^2\,d\xi}_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} + i\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\xi^2\,d\xi}_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2x}{k}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i) \qquad U_p = aU_0\frac{e^{ikx}}{x}\cdot\frac{\pi x}{k}\cdot 2i = U_0 e^{ikx}$$

$$a = \frac{k}{2\pi i}$$

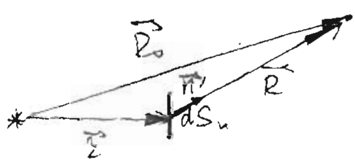
$$U_p = \frac{k}{2\pi i}\int \frac{u e^{ikR}}{R}\, dS_n$$

Различают два вида дифр: 1) когда при ?-нии существенен небольшой участок волновой пов-сти (дифракция Френеля)

2) когда расстояние от источника до экрана и от экрана до ~~…~~ т-ки наблюдения бесконечно.

На больших расст от источника падает ||-ный пучок света (плоская волна)
Каждый эл-т пов-сти - источник сфер. волн, но на больших расст эти сфер волны - плоские.
(дифракция Фраунгофера)

Дома найти $I_p = f$(угол дифракции)



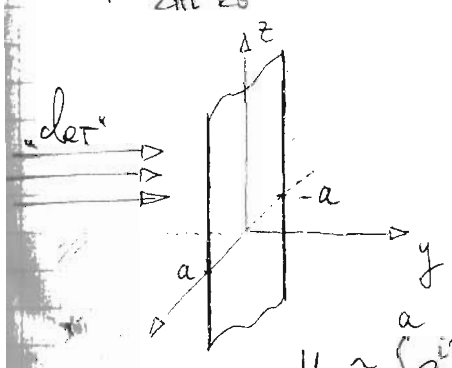
На эл-те dS_n поле - $U_0 e^{i\vec k\vec r}$

$$\vec R = \vec R_0 - \vec r \;\Big|\cdot \vec n'$$

$$R \approx R_0 - \vec n'\vec r$$

$$U_p = \frac{kU_0 e^{ikR_0}}{2\pi i R_0}\int e^{i\vec k\vec r - ik\vec n'\vec r}\, dS_n \qquad U_p \sim \int e^{i(\vec k - \vec k')\vec r}\, dS_n$$

$$k\vec n' = \vec k'$$



Элемент площади щели $dx\,dz$.

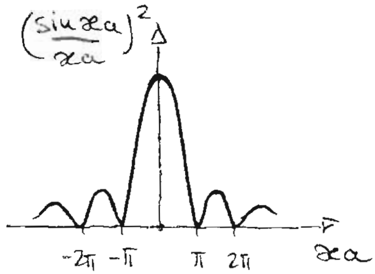
$$U_p \sim \int_{-\infty}^{+\infty} dz\, e^{i(k_z - k'_z)z}\int_{-a}^{+a} dx\, e^{i(k_x - k'_x)x}$$

этот $\int$ умноженный на 2π есть δ-функция $k_z = k'_z$

$$U_p \sim \int_{-a}^{a} e^{i\varkappa x}\,dx = \frac{e^{i\varkappa x}}{i\varkappa}\Big|_{-a}^{a} \sim \frac{\sin \varkappa a}{\varkappa a}$$

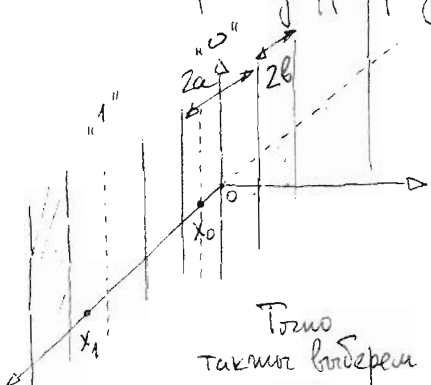
$\varkappa = k_x - k'_x \sim$ углу дифракции

$$dI = I_0 \frac{a}{\pi}\left(\frac{\sin ϰa}{ϰa}\right)^2 dϰ$$ I_0 – полная интенсивность света падающего на щель.



при $ϰa = n\pi$ – нули функции.
где $n = \pm 1, \pm 2;$

Рассмотрим дифр. Фраунгофера на дифракционной решетки.



В n-ой щели $dx_n dz_n$.

$$u_p \sim \sum_{n=0}^{N-1} \int e^{i(k_x - k_x')x_n} dx_n$$

$$k_z = k_z' \qquad k_x - k_x' = ϰ$$

$x_1 = x_0 + 2(a+b)$ обозначим $a+b=d$

$x_1 = x_0 + 2d$

Точно таким выберем т-ку x_2.

$$x_2 = x_0 + 2\cdot 2d$$

. . . .

$$x_n = x_0 + n\cdot 2d$$

~~$u_p \sim \int$~~ $$u_p \sim \sum_{n=0}^{N-1} e^{iϰ 2nd} \underbrace{\int e^{iϰx_0} dx_0}_{u_0} \sim u_0 \sum_{n=0}^{N-1} e^{i2nd}$$ – прогрессия.

$$1 + e^{i2ϰd} + e^{i4ϰd} + \dots$$ – всего N членов.

$$a_1 = 1 \quad q = e^{i2ϰd} \qquad S_N = \frac{a_1(q^N - 1)}{q-1} = \frac{e^{iNϰ2d} - 1}{e^{iϰ2d} - 1} =$$

$$= \frac{e^{iNϰd}}{e^{iϰd}} \cdot \frac{e^{iNϰd} - e^{-iNϰd}}{e^{iϰd} - e^{-iϰd}} = \frac{e^{iNϰd}}{e^{iϰd}} \cdot \frac{\sin Nϰd}{\sin ϰd}$$

$$dI \sim |u_p|^2 \qquad dI = \frac{I_0}{N}\frac{a}{\pi}\left(\frac{\sin ϰa}{ϰa}\right)^2 \left(\frac{\sin Nϰd}{\sin ϰd}\right)^2 dϰ.$$

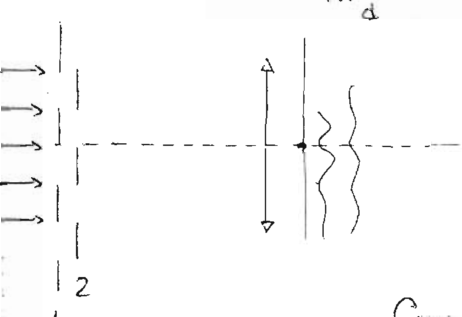
Рассмотрим при $\varkappa d = \pi n + \alpha$ – вблизи n-ого максимума, $\alpha \ll 1$

$$\sin N\varkappa d = \sin(N\pi n + N\alpha) = \underbrace{\sin Nn\pi}_{0}\cos N\alpha + \cos Nn\pi \sin N\alpha$$

$$\sin\varkappa d = \cos n\pi \sin\alpha = \cos\pi n\cdot\alpha$$

$$dI_n = I_0\frac{a}{\pi}\left(\frac{\sin(\pi n\frac{a}{d})}{n\pi\cdot\frac{a}{d}}\right)^2\frac{\sin^2 N\alpha}{N\alpha^2}\frac{d\alpha}{d} \; ; \quad \frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}\frac{\sin^2 N\alpha}{N\alpha^2} = \delta(\alpha) \; ;$$

$$I_n = I_0\frac{a}{d}\left(\frac{\sin(\pi n\frac{a}{d})}{\pi n\frac{a}{d}}\right)^2$$



$u_1 \sim \int\limits_{S_1}\dots dS_n \quad u_2 \sim \int\limits_{S_2}\dots dS_n \quad |u_1|^2 = |u_2|^2$

$u_1 + u_1 = \int\limits_{\text{откр. плоскость}}\dots dS_n = 0$ кроме фокуса (принцип Бабине)

Сколько света поглотилось телом столько же света претерпело дифр.

Абс черн тело

Когда мы рассматривали рассеяние

$\sigma = \frac{\bar I}{\bar S_0}$ $\bar I$ – излученное частицей = отобранное у волн.

$\bar I = \sigma\bar S_0 = \sigma c\bar W_0$

поглощенный импульс $\Delta p = \frac{\bar I}{c} = \sigma\cdot c\bar W_0$, но при дипольном излучении импульс не излучается

Значит сила $f = \sigma\bar W_0 = \sigma\cdot\frac{E^2}{4\pi}$

Эту силу можно получить усреднив силу лучистого трения.

$$\langle\vec{f}\rangle = \frac{2e^3}{3mc^3}\underset{0}{\underset{\parallel}{\langle\dot{\vec{E}}\rangle}} + \frac{2e^4}{3m^2c^4}\langle\vec{E}\times\vec{H}\rangle = \frac{2}{3}r_0\frac{\langle E^2\rangle}{4\pi}\vec{n}\,4\pi = \frac{8\pi}{3}r_0\frac{\langle E^2\rangle}{4\pi}\vec{n}$$

среднее величина периодич. величины

Т.е. сила действует в направлении падающей волны.

• Каково излучение в ближней зоне.

Сист. зарядов с лин. размером a

Если $R_0 \gg a$:

R_0 — от начала коорд до т-ки наобл.

$$\vec{A} = \frac{1}{cR_0}\int \vec{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\vec{r}\vec{n}}{c}}\,dV$$

Если $\lambda \gg a$ — можно во времени запаздывания ($v \ll c$) выбросить $\frac{\vec{r}\vec{n}}{c}$

$$\vec{A} = \frac{1}{cR_0}\int \vec{j}_{t'}\,dV = \frac{\dot{\vec{d}}}{cR_0}.$$

$R_0 \gg \lambda$ (волн. зона) мы получали дипольное, магнитодип.. излучение.

Если $R_0 \not\gg \lambda$ => надо учитывать скалярный потенциал

усл. Лоренца $\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$ $\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left\{\operatorname{div}\frac{\vec{d}_{t'}}{cR_0} + \frac{\varphi}{c}\right\} = 0$

$$\varphi = -\operatorname{div}\frac{\vec{d}_{t'}}{cR_0}, \quad t' = t - \frac{R_0}{c};$$

Вводят вектор Герца $\vec{z} = -\frac{\vec{d}_{t'}}{cR_0}$ тогда

$$\varphi = \operatorname{div}\vec{z} \qquad \vec{A} = \dot{\vec{z}}$$

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\frac{\vec{d}_{t'}}{R_0}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi =$$

$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\vec{d}_{t-R_0/c}}{R_0} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\frac{\vec{d}_{t-R_0/c}}{R_0} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\vec{d}_{t'}}{R_0} + \underbrace{\left(\Delta\frac{\vec{d}_{t'}}{R_0} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\vec{d}_{t'}}{R_0}\right)}_{\parallel},$$

Т.к $\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$

$$\vec{d}(t) = \vec{d_0} e^{-i\omega t} \quad \vec{d}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) = \vec{d_0} e^{-i\omega\left(t - \frac{R_0}{c}\right)} = \vec{d_0} e^{ikR_0 - i\omega t}$$

$$\text{rot}\left(\frac{\vec{d}_{t'}}{R_0}\right) = \nabla \times \frac{e^{ikR_0 - i\omega t}}{R_0}\vec{d_0} = \left\{ ik\frac{\vec{R_0}}{R_0 \cdot R_0} - \frac{1}{R_0^2} \right\} e^{ikR_0 - i\omega t} \times \vec{d_0} = \frac{ikR_0 - 1}{R_0^2}\vec{n} \times \vec{d_0}$$

$(\vec{R_0}/R_0 \equiv \vec{n})$

$$\text{rot}\,\text{rot}\left(\frac{\vec{d}_{t'}}{R_0}\right) = \nabla \times \frac{ikR_0 - 1}{R_0^3} e^{ikR_0 - i\omega t}(\vec{R_0} \times \vec{d_0}) = \left\{ \frac{ik\frac{\vec{R_0}}{R_0}}{R_0^3} - 3\frac{1}{R_0^4}\frac{\vec{R_0}}{R_0}(ikR_0 - 1) + \right.$$

$$\left. + ik\frac{\vec{R_0}}{R_0} \cdot \frac{ikR_0 - 1}{R_0^3} \right\} \times (\vec{R_0} \times \vec{d}) + \frac{ikR_0 - 1}{R_0^3}\nabla \times (\vec{R_0} \times \vec{d_0}) =$$

$(\vec{d}\nabla)\vec{R_0} - \vec{d}\,\text{div}\vec{R_0}$

(забрали экспоненту)

$$= \frac{1}{R_0^3}\left\{ ikR_0 - 3ikR_0 + 3 - k^2R_0^2 - ikR_0 \right\} \cdot \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{d}) - 2\vec{d}\,\frac{ikR_0 - 1}{R_0^3} =$$

$\vec{n}(\vec{n}\vec{d}) - \vec{d}$

$$= -\frac{\vec{d}}{R_0^3}\left\{ -3ikR_0 + 3 + 2ikR_0 - 2 \right\} + \frac{\vec{n}(\vec{n}\vec{d})}{R_0^3}\left\{ -k^2R_0^2 - 3ikR_0 + 3 \right\}$$

$$\text{rot}\,\text{rot}\,\frac{\vec{d}_{t'}}{R_0} = \frac{\vec{n}(\vec{n}\vec{d})}{R_0^3}\left(-k^2R_0^2 - 3ikR_0 + 3_0\right) + \frac{\vec{d}}{R_0^3}(ikR_0 - 1)$$

$$\vec{H} = \frac{k^2R_0^2 + ikR_0}{R_0^3}\vec{n} \times \vec{d}$$

1) $kR_0 \ll 1$ $\left(\frac{\omega}{c}R_0 = 2\pi\frac{R_0}{\lambda} \ll 1\right)$

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{n}\vec{d})\vec{n} - \vec{d}}{R_0^3} \quad \vec{H} = \frac{ikR_0}{R_0^3}\vec{n} \times \vec{d} \ll \vec{E}$$

2) $kR_0 \gg 1$ $(R_0 \gg \lambda)$